R. Courant

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung

Zweiter Band

Funktionen mehrerer Veränderlicher

Vierte unveränderte Auflage

Mit 110 Textfiguren

Springer-Verlag Berlin • Heidelberg • New York 1972

Inhaltsverzeichnis

Erstes Kapitel

Vorbemerkungen über analytische Geometrie und Vektorrechnung

§ 1. Rechtwinklige Koordinaten und Vektoren 1
Koordinatensysteme. S. 1. — Richtungen und Vektoren. — Koordinatentransformation. S. 3. — Die innere Multiplikation von Vektoren. S. 6. — Die Gleichungen der Geraden und der Ebene. S. 7.

§ 2. Dreiecksinhalt, Tetraedervolumen und äußere Vektormultiplikation . . . 10
Dreiecksinhalt. S. 10. — Äußere Multiplikation zweier Vektoren. S. 12. — Das Tetraedervolumen. S. 14.

§ 3. Die einfachsten Tatsachen über zwei-und dreireihige Determinanten . . 15
Bildungsgesetze und Haupteigenschaften. S. 15. — Anwendung auf lineare Gleichungen. S. 19.

§ 4. Die affinen Abbildungen und der Determinantenmultiplikationssatz... 22
Affine Abbildung der Ebene und des Raumes. S. 22. — Die Zusammensetzung affiner Abbildungen und die Reduktion der allgemeinen affinen Abbildung. S. 24. — Die geometrische Bedeutung der Transformationsdeterminante und der Multiplikationssatz. S. 27.

Zweites Kapitel

Funktionen mehrerer Veränderlicher und ihre Ableitungen

§ 1. Der Funktionsbegriff bei mehreren Veränderlichen 31
Funktionen und ihr Definitionsbereich. S. 31. — Die einfachsten Typen von Funktionen. S. 35. — Geometrische Veranschaulichung der Funktionen. S. 36.

§ 2. Stetigkeit 38
Definition. S. 38. — Der Grenzbegriff bei mehreren stetigen Veränderlichen. S. 40. — Beispiele für Unstetigkeitsstellen. S. 41. — Die Größenordnung des Verschwindens einer Funktion. S. 43.

§ 3. Die Ableitungen einer Funktion 45
Definition. Geometrische Veranschaulichung. S. 45. — Existenz der partiellen Ableitungen nach x und y und Stetigkeit. S. 49. — Die Vertauschbarkeit der Reihenfolge bei der Differentiation. S. 50.

§ 4. Das vollständige Differential einer Funktion und seine geometrische Bedeutung 53
Der Begriff der Differenzierbarkeit. S. 53. — Differentiation nach einer gegebenen Richtung. S. 56. — Geometrische Deutung. Tangentialebene. S. 58. — Das vollständige Differential oder der lineare Anteil einer Funktion. S. 60. — Anwendung auf die Fehlerrechnung. S. 62.

§ 5. Zusammengesetzte Funktionen und Einführung neuer unabhängiger Veränderlicher 63
Allgemeines. — Kettenregel. S. 63. — Beispiele. S. 67. — Einführung neuer unabhängiger Veränderlicher. S. 68.
§ 6. Der Mittelwertsatz und der TAYLORsche Satz bei mehreren unabhängigen Veränderlichen 71
Problemstellung und Vorbereitungen. S. 71. — Der Mittelwertsatz. S. 72. — Die TAYLORsche Formel für mehrere unabhängige Veränderliche. S. 73.
§ 7. Anwendungen des Vektorbegriffes 74
Vektorfelder und Vektorscharen. S. 74. — Anwendung auf die Theorie der Kurvenkrümmung. Zerlegung einer Bewegung in Tangential- und Normalkomponente. S. 77. — Der Gradient eines Skalars. S. 79. — Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes. S. 82.

Anhang zum zweiten Kapitel

§ **1.** Das Häufungsstellenprinzip in mehreren Dimensionen und seine Anwendungen 84
Formulierung des Häufungsstellenprinzips. S. 84. — Einige Begriffe der Punktmengenlehre. S. 86. — Der Überdeckungssatz. S. 89-
§ 2. Nähere Diskussion des Grenzbegriffes bei mehreren Veränderlichen . . . 90
Doppelfolgen und ihre Grenzwerte. S. 90. — Doppellimes bei stetigen Veränderlichen. S. 94. — Der Satz von DINI über die gleichmäßige Konvergenz monotoner Funktionsfolgen. S. 95.
§ 3. Homogene Funktionen 96

Drittes Kapitel

Ausbau und Anwendungen der Differentialrechnung

§ 1. Implizite Funktionen 98
Allgemeines. S. 98- — Geometrische Deutung. S. 99. — Die Differentiation der implizit gegebenen Funktionen. S. 101. — Beispiele. S. 103- — Mehr als zwei Veränderliche. S. 104. — Beweis für die Existenz und Stetigkeit der impliziten Funktionen. S. 106.
§ 2. Kurven und Flächen in impliziter Darstellung 108
Ebene Kurven in impliziter Darstellung. S. 108. — Singuläre Punkte von Kurven. S. 113. — Implizite Darstellung von Flächen. S. 114.
§3- Funktionensysteme, Transformationen und Abbildungen 116
Allgemeines. S. 116. — Einführung neuer krummliniger Koordinaten. S. 121. — Übertragung auf mehr unabhängige Veränderliche. S. 123. — Differentiationsformeln für die Umkehrfunktionen. S. 125. — Zerlegung und Zusammensetzung von Abbildungen und Transformationen. S. 128. — Allgemeiner Satz über die Umkehrbarkeit einer Transformation und über Systeme von impliziten Funktionen. S. 134. — Die Abhängigkeit von Funktionen. S. 136. — Schlußbemerkungen. S. 137.
§ 4. Anwendungen 139
Zur Theorie der krummen Flächen. S. 139. — Konforme Abbildung im allgemeinen. S. 145.
§ 5. Kurvenscharen, Flächenscharen und ihre Einhüllenden 147
Allgemeines. S. 147. — Einhüllende einparametriger Kurvenscharen. S. 149- — Beispiele. S. 152. — Einhüllende von Flächenscharen. S. 157-

§ 6. Maxima und Minima 159
Notwendige Bedingungen. S. 159. — Beispiele. S. 162. — Maxima und Minima mit Nebenbedingungen. S. 164. — Beweis der Multiplikatorenregel im einfachsten Falle. S. 167. — Verallgemeinerung der Multiplikatorenregel. S. 169. — Beispiele. S. 174.

Anhang zum dritten Kapitel

§ 1. Hinreichende Bedingungen für Extrema 177
§ 2. Singuläre Punkte von ebenen Kurven 181
§ 3. Singuläre Punkte von Flächen 184
§ 4. Die Beziehung zwischen den EuLERschen und LAGRANGEschen Darstellungen der Bewegung einer Flüssigkeit 184
§ 5. Tangentialdarstellung einer geschlossenen Kurve 185

Viertes Kapitel

Integrale von Funktionen mehrerer Veränderlicher

§ 1. Gewöhnliche Integrale als Funktionen eines Parameters 187
Beispiele und Definitionen. S. 187. — Stetigkeit und Differenzierbarkeit eines Integrales nach dem Parameter. S. 189.
§ 2. Das Integral einer stetigen Funktion über einen ebenen oder räumlichen Bereich 194
Das Gebietsintegral als Volumen. S. 194. — Die allgemeine analytische Fassung des Integralbegriffes. S. 196. — Beispiele. S. 199. — Bezeichnungen, Ergänzungen, Grundregeln. S. 201. — Integralabschätzungen und Mittelwertsatz. S. 203. — Integrale über drei- und mehrdimensionale Bereiche. S. 204. — Gebietsdifferentiation. — Masse und Dichte. S. 206.
§ 3- Zurückführung des Gebietsintegrals auf mehrfache gewöhnliche Integrale 208
Betrachtung für ein Rechteck. S. 208. — Folgerungen. Vertauschung von Integrationen. Differentiation unter dem Integralzeichen. S. 211. — Ausdehnung des Resultats auf allgemeinere Bereiche. S. 213. — Ausdehnung der Ergebnisse auf mehrdimensionale Bereiche. S. 217.
§ 4. Transformation der Gebietsintegrale 218
Einführung von Polarkoordinaten in der Ebene. S. 218. — Die allgemeine Transformationsformel bei zwei unabhängigen Veränderlichen. S. 220. — Bereiche von mehr als zwei Dimensionen. S. 225.
§ 5. Uneigentliche Integrale 226
Sprunghaft unstetige Funktionen. S. 226. — Funktionen mit isolierten Unendlichkeitspunkten. S. 227. — Funktionen mit Unendlichkeitslinien. S. 231. — Unendlicher Integrationsbereich. S. 231. — Zusammenfassende Bemerkungen und Ergänzungen. S. 233.
§ 6. Geometrische Anwendungen 234
Elementare Volumenberechnung. S. 234. — Allgemeines zur Volumenberechnung. — Rotationskörper. —Volumen in Polarkoordinaten. S. 236. — Flächeninhalt krummer Flächenstücke. S. 238.
§ 7. Physikalische Anwendungen 244
Statisches Moment und Schwerpunkt. S. 245- — Trägheitsmoment. S. 247- — Das physische Pendel. S. 249. — Potential anziehender Massen. S. 251.

Anhang zum vierten Kapitel

§ 1. Die Existenz des Gebietsintegrals 254
Der Inhalt von ebenen und räumlichen Bereichen. S. 254. — Ein Satz über glatte Kurvenbögen. S. 258. — Die Existenz des Gebietsintegrals für stetige Funktionen. S. 260.
§ 2. Allgemeine Formel für den Flächeninhalt (oder Rauminhalt) eines durch Segmente von Geraden oder Ebenen begrenzten Bereiches (GULDINS Formel). Der Polarplanimeter. 262
§ 3. Volumen und Oberfläche bsi beliebiger Anzahl von Dimensionen 265
Zerlegung von Gebietsintegralen. S. 265. — Oberflächen und Integration über Oberflächen in mehr als drei Dimensionen. S. 267. —• Oberfläche und Volumen der «-dimensionalen Einheitskugel. S. 268. —• Verallgemeinerungen, Parameterdarstellung. S. 270.
§ 4. Uneigentliche Integrale als Funktionen eines Parameters. 273
Gleichmäßige Konvergenz. Stetige Abhängigkeit vom Parameter. S. 273. — Integration und Differentiation uneigentlicher Integrale nach einem Parameter. S. 275. —• Beispiele. S. 278.
§ 5. Die FRESNELschen Integrale 282
§ 6. Das FouRiERsche Integral 283
Einleitung. S. 283. — Beweis des FouRiERschen Integralsatzes. S. 285.
§ 7. Die EULERschen Integrale (Gammafunktion) 287
Definition und Funktionalgleichung. S. 287. —- Produktdarstellungen der /"-Funktion. S. 294. — Die Funktion log.T{#) und ihre Ableitungen. S. 297. —• Der Ergänzungssatz. S. 298. — Die Betafunktion. S. 299.
f 8. Differentiation und Integration von gebrochener Ordnung. Die ÄBELsche Integralgleichung. 302
§ 9. Zur Flächeninhaltsdefinition bei krummen Flächen 303

Fünftes Kapitel

Integration über mehrdimensionale Bereiche. Fortsetzung

§ \. Kurvenintegrale 305
Definition der Kurvenintegrale. — Bezeichnungen. S. 306. — Grundregeln. S. 309. — Mechanische Deutung der Kurvenintegrale. S. 311. —• Integration totaler Differentiale. S. 312. — Der Hauptsatz über Kurvenintegrale. S. 313. — Die Bedeutung des einfachen Zusammenhanges. S. 319-
§ 2. Zusammenhang zwischen Kurvenintegralen und Gebietsintegralen in der Ebene. (Integralsätze von GAUSS, STOKES und GREEN). 320
Formulierung und Beweis des GAUssschen Integralsatzes. S. 320. — Vektorielle Formulierung des GAUssschen Integralsatzes. Integralsatz von STOKES. S. 323. — Integralformeln von GREEN. Integral der Funktionaldeterminante. S. 326. — Transformation von *Au* auf Polarkoordinaten. S. 328.
§ 3. Anschauliche Deutung und Anwendungen der Integralsätze in der Ebene 330
Kinematische Deutung des GAUssschen Integralsatzes. Divergenz und Quellenergiebigkeit. S. 330. — Deutung des Satzes von STOKES. S. 332. — Transformation von Gebietsintegralen. S. 333-
§4. Oberflächenintegrale. 335
Integration über orientierte Bereiche. S. 335. — Definition der Integrale über Flächen im Räume. S. 341. — Physikalische Deutung der Flächenintegrale. S. 344.

§ 5. Die Integralsätze von GAUSS und GREEN im Raum 345
Der Integralsatz von GAUSS und seine physikalische Bedeutung. S. 345. — Die Integralsätze von GREEN. S. 350. — Anwendung der Integralsätze im Raum. S. 351-
§ 6. Der Integralsatz von STOKES im Raum 352
Formulierung und Beweis. S. 352. — Physikalische Bedeutung des STOKESschen Satzes. S. 355-
§ 7. Grundsätzliches über den Zusammenhang von Differentiation und Integration bei-mehreren Veränderlichen 357

Anhang zum fünften Kapitel

§ **1.** Bemerkungen zu den Sätzen von STOKES und GAUSS 360
§ 2. Darstellung eines quellenfreien Vektorfeldes als Rotation 362

Sechstes Kapitel

Anwendungen, insbesondere Differentialgleichungen

§1. Die Differentialgleichungen der Mechanik eines Massenpunktes 365
Die Bewegungsgleichungen. S. 365. — Das Energieprinzip. S. 367. — Gleichgewicht. S. 368.
§ 2. Beispiele zur Mechanik eines Massenpunktes 370
Die Bahn eines fallenden Körpers. S. 370. — Kleine Schwingungen um eine Gleichgewichtslage. S. 372. — Planetenbewegung. S. 375.
§ 3. Weitere Beispiele von Differentialgleichungen 3 80
Die allgemeine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. S. 3 81. — Die Trennung der Variablen. S. 382. — Festlegung der Lösung durch Randwerte. Belastetes Seil und belasteter Balken. S. 384.
§ 4. Lineare Differentialgleichungen 389
Superpositionsprinzip. Allgemeine Lösungen. S. 389- — Homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung. S. 393. — Die inhomogene Differentialgleichung. Methode der Trennung der Variablen. S. 395. — Die erzwungene Bewegung des einfachsten schwingungsfähigen Systems. S. 398.
§ 5. Allgemeines über Differentialgleichungen 398
Differentialgleichung erster Ordnung und ihre geometrische Deutung. S- 399- — Differentialgleichung einer Kurvenschar. Singuläre Lösungen. Orthogonaltrajektorien. S. 402. — Integrierender Faktor (EuLERScher Multiplikator). S. 405- — Existenz- und Eindeutigkeitssatz. S. 407. — Systeme von Differentialgleichungen und Differentialgleichungen höherer Ordnung. S. 410. — Integration durch Potenzreihenansatz. S. **411.**
§ 6. Das Potential anziehender Ladungen 412
Potentiale von Massenbelegungen. S. 413- — Die Differentialgleichung des Potentials. S. 416. — Homogene Doppelschicht. S. 418. — Der Satz vom Mittelwert. S. 421. — Die Randwertaufgabe für den Kreis. Das PoissoNsche Integral. S. 422.
§ 7. Weitere Beispiele partieller Differentialgleichungen 424
Die Wellengleichung in einer Dimension. S. 424. — Die Wellengleichung im dreidimensionalen Raum. S. 426. — Die MAXWEixschen Gleichungen im leeren Räume. S. 428.
Verzeichnis der wichtigsten Formeln und Sätze zu beiden Bänden 432
Sachverzeichnis zum zweiten Bande 461