

---

# Kompaktkurs Analysis Vektorrechnung

---

**Wiederholungs- und Ergänzungsbuch  
zur Schulmathematik  
für den Übergang von der Schule zur Hochschule**

---

von  
Akad. Dir. Norbert CHRISTMANN / Prof. Dr. Joachim WICK  
Universität Kaiserslautern, Fachbereich Mathematik

Vierte Auflage, zweiter Nachdruck.  
Mit 240 Abbildungen,  
vielen durchgerechneten Beispielen  
und zahlreichen Aufgaben  
sowie deren Lösungen im Anhang.

Dümmelrbuch 4275

# INHALTSVERZEICHNIS

## TEIL ANALYSIS

<u>§ 1 Reelle Funktionen</u> .....	3
1.0 Übersicht zu § 1 .....	3
1.1 Funktionsbegriff .....	4
1.1.1 Funktionen als eindeutige Zuordnung .....	4
1.1.2 Zahlenmengen .....	6
1.1.3 Einschränkung und Fortsetzung von Funktionen .....	7
1.2 Abschnittsweise definierte Funktionen .....	9
1.2.1 Einführungsbeispiele .....	9
1.2.2 Die Betragsfunktion .....	11
1.2.3 Die Vorzeichenfunktion (Signumfunktion) .....	12
1.3 Achsenschnittpunkte, Nullstellen .....	13
1.4 Monotonie .....	16
1.5 Beschränkte Funktionen .....	18
1.5.1 Fragestellung .....	18
1.5.2 Definitionen .....	19
1.6 Ergänzung: Die Gaußsche Klammerfunktion .....	22
<u>§ 2 Rechnen mit Funktionen</u> .....	23
2.0 Übersicht zu § 2 .....	23
2.1 Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier Funktionen .....	24
2.2 Verkettung von Funktionen .....	26
2.3 Die Umkehrfunktion .....	28
<u>§ 3 Grenzwerte, Stetigkeit</u> .....	31
3.0 Übersicht zu § 3 .....	31
3.1 Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow a$ ( $a \in \mathbb{R}$ ), Stetigkeit .....	32
3.1.1 Beispiele .....	32
3.1.2 Häufungspunkte .....	33
3.1.3 Grenzwertsatz .....	34
3.1.4 Stetigkeit .....	36
3.1.5 Stetigkeit beim Verketteten .....	38
3.1.6 Viele Funktionen sind stetig .....	39
3.2 Zahlenfolgen, Grenzwerte von Zahlenfolgen .....	42
3.2.1 Begriff der Zahlenfolge .....	42
3.2.2 Berechnung von Grenzwerten .....	44
3.2.3 Rekursiv definierte Folgen, Reihen .....	45
3.3 Grenzwerte für $ x  \rightarrow \infty$ .....	50
3.4 Ergänzung: Stetigkeit auf abgeschlossenen Intervallen .....	54

<u>§ 4 Die Ableitung. Differenzieren</u> .....	57
4.0 Übersicht zu § 4 .....	57
4.1 Zur Definition und Bedeutung der Ableitung .....	58
4.1.1 Erinnerung: Die Steigung linearer Funktionen .....	58
4.1.2 Das Tangentenproblem .....	59
4.1.3 Die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten .....	61
4.1.4 Für Kenner: Die Ableitung als stetige Fortsetzung .....	62
4.1.5 Die Tangentenfunktion .....	62
4.1.6 Berechnung einiger Ableitungen mit der Definition .....	63
4.1.7 Zur Bedeutung der Ableitung .....	65
4.1.8 Die Ableitungsfunktion. Höhere Ableitungen .....	68
4.2 Ableitungsregeln .....	72
4.2.1 Formelsammlung .....	72
4.2.2 Summenregel .....	73
4.2.3 Faktorregel .....	73
4.2.4 Die Kettenregel .....	74
4.2.5 Produkt- und Quotientenregel .....	76
4.2.6 Weitere Beispiele Folgerungen .....	76
4.3 Ergänzung: Bezeichnungen beim Differenzieren .....	80
<u>§ 5 Funktionsuntersuchung mit Hilfe der Differentialrechnung</u> .....	81
5.0 Übersicht zu § 5 .....	81
5.1 Monotonie und Ableitung .....	82
5.2 Extremstellen .....	86
5.2.1 Definitionen .....	86
5.2.2 Kriterien zur Bestimmung von Extremstellen .....	88
5.2.3 Zusammenfassung: Bestimmung von Extremstellen .....	92
5.3 Krümmung von Schaubildern. Wendepunkte .....	93
5.4 Zusammenfassende Beispiele und Aufgaben .....	95
<u>§ 6 Integralrechnung</u> .....	101
6.0 Übersicht zu § 6 .....	101
6.1 Einführung in die Integralrechnung .....	102
6.1.1 Das Flächenproblem .....	102
6.1.2 Erste Beispiele .....	102
6.1.3 Integralbegriff .....	104
6.2 Ergänzungen zur Integraldefinition .....	108
6.2.1 Verallgemeinerung von Beispiel 3 aus 6.1.2 .....	108
6.2.2 Anschauungsfreie Definitionen des Integrals (nur für Kenner .....	109
6.3 Stammfunktionen .....	110
6.3.1 Das Integral als Funktion der oberen Grenze .....	110
6.3.2 Stammfunktionen .....	110
6.3.3 Bestimmung aller Stammfunktionen .....	111
6.4 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung .....	114
6.4.1 Das Integral als Stammfunktion .....	114
6.4.2 Integralberechnung mit Stammfunktion .....	115

6.5	Flächenberechnung und Integral .....	117
6.6	Integrationsregeln (Zusammenfassung) .....	120
6.7	Produktintegration (Partielle Integration) .....	122
6.8	Integration durch Substitution .....	124
6.8.1	Herleitung der Substitutionsregel .....	124
6.8.2	Anwendung der Substitutionsregel .....	124
<u>§ 7</u>	<u>Die Taylorsche Formel</u> .....	127
7.0	Übersicht zu § 7 .....	127
7.1	Herleitung der Taylorschen Entwicklung für Polynomfunktionen .....	128
7.2	Der Taylorsche Satz .....	129
7.3	Anwendungen der Taylorschen Formel .....	130
<u>§ 8</u>	<u>Ergänzung: Zwei wichtige Beweisverfahren</u> .....	135
8.1	Die vollständige Induktion .....	135
8.2	Der indirekte Beweis .....	138
<u>§ 9</u>	<u>Ergänzung: Gruppen und Körper</u> .....	139
9.1	Verknüpfungen .....	139
9.2	Eigenschaften von Verknüpfungen .....	141
9.3	Gruppen .....	144
9.4	Körper .....	148
<u>§ 10</u>	<u>Ergänzung: Kennzeichnung der reellen Zahlen</u> .....	149
10.1	Körpereigenschaften .....	149
10.2	Anordnungseigenschaften .....	149
10.3	Monotonieeigenschaften .....	150
10.4	Vollständigkeit .....	150
<u>§ 11</u>	<u>Ganzrationale und rationale Funktionen. Wurzelfunktionen</u> .....	153
11.0	Übersicht zu § 11 .....	153
11.1	Definitionen und Beispiele .....	154
11.2	Horner-Schema .....	155
11.3	Faktorzerlegung: Nullstellen ganzrationaler Funktionen .....	157
11.4	Definitionslücken rationaler Funktionen. Asymptoten .....	162
11.5	Differentiation und Integration rationaler Funktionen .....	167
11.6	Zusammenfassende Beispiele und Aufgaben .....	170
11.7	Ergänzung: Wurzelfunktionen .....	174

<u>§ 12 Trigonometrische Funktionen</u> .....	177
12.0 Übersicht zu § 12 .....	177
12.1 Das Bogenmaß .....	178
12.2 Definition der trigonometrischen Funktionen .....	179
12.2.1 Sinus- und Kosinusfunktion .....	179
12.2.2 Die Tangensfunktion .....	181
12.3 Eigenschaften (Zusammenfassung) .....	184
12.4 Differenzieren und Integrieren der Winkelfunktionen ..	186
12.4.1 Herleiten der Ableitung der Sinusfunktion .....	186
12.4.2 Ableitungen der trigonometrischen Funktionen .....	187
12.4.3 Stammfunktionen der trigonometrischen Funktionen ..	187
12.4.4 Ableitung und Integration der Arkusfunktionen .....	187
12.5 Zusammenfassendes Beispiel, Aufgaben .....	190
<u>§ 13 Exponential- und Logarithmusfunktionen</u> .....	195
13.0 Übersicht zu § 13. Erinnerung an Vorkenntnisse .....	195
13.0.1 Hinweise zum Inhalt .....	195
13.0.2 Erinnerung: Die Funktion $\exp_2: x \mapsto 2^x$ .....	196
13.1 Die natürliche Exponentialfunktion .....	199
13.1.1 Die Differentialgleichung für Exponentialfunktionen ..	199
13.1.2 Die Eulersche Zahl $e$ .....	201
13.2 Die natürliche Logarithmusfunktion .....	205
13.3 Die allgemeine Exponential- und Logarithmusfunktion ..	206
13.4 Anwendungen .....	209
13.4.1 Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall ...	209
13.4.2 Zur Differentialgleichung für Exponentialfunktionen ..	212
13.5. Ergänzungen zur Analysis .....	215
<u>§ 14 Vektorrechnung und lineare Gleichungssysteme</u> .....	219
14.1 Lineare Gleichungen .....	219
14.2 Komplexe Zahlen .....	225
14.3 Der $\mathbb{R}^3$ .....	232
14.4 Verschiebungen. (Translationen) .....	234
14.5 Anwendung auf Dreiecksuntersuchungen .....	236
14.6 Skalarprodukt .....	240
14.7 Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung .....	242
14.8 Dreiecksungleichung .....	245
14.9 Projektionen, Winkel .....	248
14.10 Einheitsvektoren .....	250
14.11 Lineare Unabhängigkeit .....	251
14.12 Vektorprodukt .....	254
14.13 Matrizen .....	257

14.14 Ein Beispiel für ein lineares Gleichungssystem in Matrizenschreibweise .....	264
14.15 Gauß-Algorithmus .....	272
14.16 Lineare Gleichungssysteme .....	279
§ 15 Ergänzung: Kegelschnitte - Kurven zweiter Ordnung .....	283
Lösungen zum Teil Analysis .....	L8 51 - L8 51
Lösungen zum Teil Vektorrechnung .....	L8 52 - L8 58
<u>Register</u> .....	L8 59

Auf S. 152 findet sich das griechische Alphabet.

#### Hinweise zur 2.-4. Auflage.

Gegenüber der 1. Auflage sind ab der 2. Auflage folgende Veränderungen eingearbeitet:

Statt der getrennten Register für die Teile Analysis und Vektorrechnung findet sich ein Gesamtregister am Schluß des Bandes (S. L8 59f).

Die Seiten 215/216 enthalten den neuen Abschnitt "13.5 Ergänzungen zur Analysis" (Volumen und Mantelfläche von Drehkörpern; Parameterdarstellung und Bogenlänge von Kurven).

Neu aufgenommen wurde der Abschnitt "15. Ergänzung: Kegelschnitte - Kurven zweiter Ordnung" (S. 283f). Er enthält u.a. die Definitionen von Ellipse, Hyperbel und Parabel als Ortslinien sowie die Normalformen der Gleichungen dieser Kegelschnitte.

Das Aufgabenmaterial wurde ergänzt durch Aufgaben 8 und 9 auf S. 100, Aufg. 10 und 11 auf S. 134, Aufg. 41-46 auf S. 193f sowie Aufg. 31 auf S. 214.

Die 4. Auflage und deren Nachdrucke sind korrigierte Nachdrucke der 3. Auflage. Für Korrekturhinweise zur 4. Auflage danken wir besonders Herrn W. HERGET aus Clausthal.