Lothar Collatz

Funktionalanalysis und numerische Mathematik

Mit 96 Abbildungen und 2 Porträts

Unveränderter Nachdruck
der ersten Auflage von 1964

Technische Hochschule Darmstadt
FACHBEREICH INFORMATIK
BIBLIOTHEK
Inventar-Nr.: 1965
Sachgebiete:
Standort:



Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1968

Inhaltsverzeichnis

Seite

Abkürzungen XV

Kapitel I

Grundlagen der Funktionalanalysis mit Anwendungen

§ 1. Typische Fragestellungen der numerischen Mathematik . . 1
1.1 Einige allgemeine Begriffe 1
1.2 Lösungen von Gleichungen 2
1.3 Untersuchung der Eigenschaften der Lösungen von Gleichungen . 6
1.4 Extremalaufgaben mit oder ohne Nebenbedingungen 6
1.5 Darstellungsaufgaben (Koeffizientenbestimmungen) 8
1.6 Auswertungen 11

§ 2. Einige Typen von Räumen 12
2.1 Höldersche und Minkowskische Ungleichung 12
2.2 Der topologische Raum 14
2.3 Quasimetrische und metrische Räume 16
2.4 Lineare Räume 22
2.5 Normierte Räume 23
2.6 Unitäre Räume und Schwarzsche Ungleichung 27
2.7 Die Parallelogrammgleichung 29
2.8 Orthogonalität in unitären Räumen, Besselsche Ungleichung . . 33

§ 3. Ordnungen. 36
3.1 Halbordnung und Totalordnung 36
3.2 Verbände 38
3.3 Pseudometrische Räume 40

§ 4. Konvergenz und Vollständigkeit 41
4.1 Konvergenz im pseudometrischen Raum 41
4.2 Cauchy-konvergente Folgen 43
4.3 Vollständigkeit, Hilbert- und Banachräume 43
4.4 Einige Stetigkeitsaussagen 49
4.5 Einfache Folgerungen für den Hilbertschen Raum, Unterräume . 50
4.6 Vollständige Orthonormalsysteme in Hilberträumen 52
4.7 Beispiele 56
4.8 Schwache Konvergenz 60

§ 5. Kompaktheit 61
5.1 Kompakt und kompakt in sich 61
5.2 Beispiele für Kompaktheit 63

Seite

5.3 Der Satz von ARZELÀ 64
5.4 Von Integraloperatoren erzeugte, in sich kompakte Funktionenmengen 67

§ 6. Operatoren in pseudometrischen und spezielleren Räumen 69

6.1 Lineare und beschränkte Operatoren. 69
6.2 Zusammensetzung von Operatoren 71
6.3 Der inverse Operator 73
6.4 Beispiele von Operatoren 75
6.5 Die Inversen benachbarter Operatoren 79
6.6 Die Kondition eines linearen beschränkten Operators 81
6.7 Eine Fehlerabschätzung für ein Iterationsverfahren 82
6.8 Der Satz von RIESZ und der Auswahlsatz 83
6.9 Ein Satz von BANACH über Folgen von Operatoren 84
6.10 Anwendung auf Quadraturformeln 86

§ 7. Operatoren in Hilberträumen 88

7.1 Der adjungierte Operator 88
7.2 Beispiele 91
7.3 Differentialoperatoren bei Funktionen einer Veränderlichen . . 94
7.4 Differentialoperatoren bei Funktionen mehrerer Veränderlichen . 96
7.5 Vollstetige Operatoren 100
7.6 Vollstetige Integraloperatoren 102
7.7 Restgliedabschätzungen für holomorphe Funktionen 104
7.8 Ableitungsfreie Abschätzungen für Quadraturfehler 105
7.9 Ein Grundprinzip der Variationsrechnung. 108

§ 8. Eigenwertaufgaben 110

8.1 Allgemeine Eigenwertaufgaben 110
8.2 Spektrum eines Operators in einem metrischen Raum 114
8.3 Einschließungssatz für Eigenwerte 115
8.4 Projektionen 118
8.5 Extremaleigenschaften der Eigenwerte 120
8.6 Zwei Minimalprinzipien bei Differentialgleichungen 125
8.7 RITZsches Verfahren 128

§ 9. Vektornormen und Matrixnormen 132

9.1 Vektornormen 132
9.2 Vergleich verschiedener Vektornormen 133
9.3 Matrixnormen 135
9.4 Aus der Matrizenlehre 137
9.5 EUKLIDische Vektornorm und passende Matrixnormen 139
9.6 Andere Vektornormen und zugeordnete Matrixnormen 141
9.7 Transformierte Normen 143

§ 10. Weitere Sätze über Vektor- und Matrixnormen 144

10.1 Duale Vektornormen 144
10.2 Bestimmung einiger dualer Normen 146
10.3 Matrixpotenzen. 146
10.4 Eine Minimaleigenschaft der Spektralnorm 147
10.5 Abweichung einer Matrix von der Normalität 149
10.6 Spektralvariation zweier Matrizen 152
10.7 Vermischte Aufgaben zu Kapitel I 155
10.8 Hinweise zu den Lösungen bei einigen Aufgaben von 10.7 . . . 157

Kapitel II

Iterative Verfahren

Seite

§ 11. Der Fixpunktsatz für das allgemeine Iterationsverfahren in pseudometrischen Räumen 160

11.1 Iterationsverfahren und einfache Beispiele 160
11.2 Iterationsverfahren bei Differentialgleichungen 162
11.3 Der allgemeine Fixpunktsatz 164
11.4 Beweis des allgemeinen Fixpunktsatzes 166
11.5 Der Eindeutigkeitssatz 168

§ 12. Spezialfälle des Fixpunktsatzes und Abänderung des Operators 169

12.1 Spezialfall eines linearen Hilfsoperators P. 169
12.2 Spezialfall eines metrischen Raumes mit P als Zahlenfaktor . . 170
12.3 Spezialfall eines metrischen Raumes mit P als nichtlinearer, reellwertiger Funktion 172
12.4 Durchführung von Iterationen mit einem abgeänderten Operator und Genauigkeitsfragen 173
12.5 Fehlerabschätzung bei abgeänderter Iteration 176

§ 13. Iterationsverfahren bei Gleichungssystemen 177

13.1 Eine einzelne Gleichung 177
13.2 Verschiedene Iterationsverfahren bei Gleichungssystemen . . . 178
13.3 Einige Konvergenzkriterien bei linearen Gleichungssystemen . . 180
13.4 Zeilen- und Spaltensummenkriterium 182

§ 14. Gleichungssysteme und Differenzenverfahren 185

14.1 Differenzenverfahren bei elliptischen Differentialgleichungen . . 185
14.2 Fehlerabschätzung für Gesamtschritt- und Einzelschrittverfahren 188
14.3 Gruppeniteration 191
14.4 Unendliche lineare Gleichungssysteme 192
14.5 Overrelaxation mit Fehlerabschätzung 193
14.6 Wahl des Overrelaxationsfaktors 196
14.7 Methode der alternierenden Richtungen 198

§ 15. Iterationsverfahren bei Differential- und Integralgleichungen 200

15.1 Nichtlineare Randwertaufgaben 200
15.2 Nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen 204
15.3 Integralgleichungen 206
15.4 Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen 208
15.5 Fehlerabschätzung bei hyperbolischen Systemen 211

§ 16. Ableitung von Operatoren in supermetrischen Räumen . . 213

16.1 Die Fréchetsche Ableitung 213
16.2 Höhere Ableitungen 214
16.3 Die Kettenregel der Differentialrechnung 216
16.4 Grundsätzliche Beispiele zur Bildung der Ableitungen 217
16.5 L-metrische Räume 220
16.6 Mittelwertsatz und Taylorsche Formel 223

Seite

§ 17. Aufstellung von Iterationsverfahren 224

17.1 Gewöhnliches und vereinfachtes NEWTONsches Verfahren . . . 224
17.2 Fehlerabschätzung für das vereinfachte NEWTONsche Verfahren 226
17.3 Vereinfachtes NEWTONsches Verfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben 228
17.4 Die Ordnung von Iterationsverfahren 230
17.5 Iterationsverfahren bei Gleichungen mit holomorphen Funktionen, auch bei mehrfachen Nullstellen 232
17.6 Allgemeines Iterationsverfahren k-ter Ordnung zur Lösung der Operatorgleichung $T u = \Theta$ 234
17.7 Bemerkung über den Rechenaufwand bei Verfahren höherer Ordnung 237

§ 18. Regula falsi 239

18.1 Primitivform und Normalform der Regula-falsi-Verschärfungen . 239
18.2 Primitivform der Regula falsi bei reellen Funktionen einer Veränderlichen 240
18.3 Die Regula falsi bei Operatorgleichungen 241
18.4 Erweiterungen der Regula falsi 243
18.5 Steigungen eines Operators und NEWTONsches Interpolationspolynom 244
18.6 Konvergenz der Regula-falsi-Methode bei reellen Funktionen einer Veränderlichen 246
18.7 Allgemeinere Verfahren und Beispiele 249

§ 19. NEWTONsches Verfahren mit Verschärfungen 251

19.1 Das NEWTONsche Verfahren mit Verschärfungen und die grundlegenden Abschätzungsfunktionen 251
19.2 Allgemeiner Konvergenzsatz für die NEWTONschen Verfahren mit Verschärfungen 253
19.3 Allgemeine Bemerkungen über die Anwendung des NEWTONschen Verfahrens 256
19.4 Das NEWTONsche Verfahren bei Eigenwertaufgaben 257
19.5 Das NEWTONsche Verfahren bei Approximationsaufgaben . . . 260

§ 20. Monotonie und Extremalprinzipien beim NEWTONschen Verfahren 264

20.1 Problemklasse, konvexe und konkave Operatoren 264
20.2 Monotonie beim NEWTONschen Verfahren 266
20.3 Extremalprinzipien und Einschließungssatz 267
20.4 Beispiele nichtlinearer Randwertaufgaben 269
20.5 Konvergenzuntersuchung 270
20.6 Vermischte Aufgaben zu Kap. II 272
20.7 Hinweise zu den Lösungen 273

Kapitel III

Monotonie, Ungleichungen und weitere Gebiete

§ 21. Monotone Operatoren 275

21.1 Definition und Beispiele 275
21.2 Monoton zerlegbare Operatoren 277
21.3 Anwendung des SCHAUDERschen Fixpunktsatzes 281

Seite

21.4 Anwendung des SCHAUDERschen Satzes bei nichtlinearen Differentialgleichungen 282
21.5 Anwendung auf reelle lineare Gleichungssysteme 284

§ 22. Weitere Anwendungen des SCHAUDERschen Satzes 286
22.1 Extrapolation mit Fehlerabschätzung bei einer monotonen Iterationsfolge 286
22.2 Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme 289
22.3 Anwendung auf lineare Differentialgleichungen 291
22.4 Ein weiterer Monotoniesatz 292
22.5 Anwendungen auf nichtlineare Integralgleichungen 294

§ 23. Monotone Art bei Matrizen und Randwertaufgaben 296
23.1 Matrizen monotoner Art 296
23.2 Monotone Art bei linearen Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen 300
23.3 Randmaximumsatz bei nichtlinearen elliptischen Differentialgleichungen 301
23.4 Monotone Art bei nichtlinearen elliptischen Differentialgleichungen 305
23.5 Spezialfall der linearen elliptischen Differentialgleichungen . . . 307

§ 24. Anfangswertaufgaben und weitere Monotoniesätze 309
24.1 Strenge Monotonie bei parabolischen Gleichungen 309
24.2 Der allgemeine Monotoniesatz 310
24.3 Nichtlineare hyperbolische Differentialgleichungen 313
24.4 Majorisierung der GREENschen Funktion und nichtlineare Randwertaufgaben 316

§ 25. Approximation von Funktionen 320
25.1 Problemstellungen bei Approximationsfragen 320
25.2 Lineare Approximation 323
25.3 Menge der Minimallösungen bei rationaler Approximation . . . 324
25.4 Existenzsatz für rationale TSCHEBYSCHEFF-Approximation . . . 325
25.5 Allgemeiner Einschließungssatz für die Minimalabweichung . . 327
25.6 Ein System von Ungleichungen 329
25.7 Anwendungen 331
25.8 Rationale T-Approximation und Eigenwertaufgaben 336

§ 26. Diskrete TSCHEBYSCHEFF-Approximation und Austauschverfahren 338
26.1 Die diskrete T-Approximation 338
26.2 Referenz und Referenzabweichung 339
26.3 Das Zentrum 341
26.4 Austauschverfahren 342
26.5 Vermischte Aufgaben zu Kap. III 344
26.6 Hinweise zu den Lösungen 347

Anhang: Zum SCHAUDERschen Fixpunktsatz
26.7 Hilfssätze über kompakte Mengen 350
26.8 Zwei Fassungen des SCHAUDERschen Fixpunktsatzes 353

Literaturverzeichnis 356

Namenverzeichnis 363

Sachverzeichnis 366