Gottlob Frege

Die Grundlagen der Arithmetik

Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl

1990
Georg Olms Verlag
Hildesheim · Zürich · New York

Inhalt.

Seite

§ 1. In der Mathematik ist in neuerer Zeit ein auf der Strenge der Beweise und scharfe Fassung der Begriffe gerichtetes Bestreben erkennbar. 1
§ 2. Die Prüfung muss sich schliesslich auch auf den Begriff der Anzahl erstrecken. Zweck des Beweises. 2
§ 3. Philosophische Beweggründe für solche Untersuchung: die Streitfragen, ob die Gesetze der Zahlen analytische oder synthetische Wahrheiten, apriori oder aposteriori sind. Sinn dieser Ausdrücke. 3
§ 4. Die Aufgabe dieses Buches. 4

I. Meinungen einiger Schriftsteller über die Natur der arithmetischen Sätze.

Sind die Zahlformeln beweisbar?

§ 5. Kant verneint dies, was Hankel mit Recht paradox nennt. 5
§ 6. Leibnizens Beweis von $2 + 2 = 4$ hat eine Lücke. Grassmanns Definition von $a + b$ ist fehlerhaft. 7
§ 7. Mills Meinung, dass die Definitionen der einzelnen Zahlen beobachtete Thatsachen behaupten, aus denen die Rechnungen folgen, ist unbegründet. 9
§ 8. Zur Rechtmässigkeit dieser Definitionen ist die Beobachtung jener Thatsachen nicht erforderlich. 11

Seite

Sind die Gesetze der Arithmetik inductive Wahrheiten?

§ 9. Mills Naturgesetz. Indem Mill arithmetische Wahrheiten Naturgesetze nennt, verwechselt er sie mit ihren Anwendungen. 12

§ 10. Gründe dagegen, dass die Additionsgesetze iductive Wahrheiten sind: Ungleichartigkeit der Zahlen; wir haben nicht schon durch die Definition eine Menge gemeinsamer Eigenschaften der Zahlen; die Induction ist wahrscheinlich umgekehrt auf die Arithmetik zu gründen. 14

§ 11. Leibnizens „Eingeboren". 17

Sind die Gesetze der Arithmetik synthetisch-apriori oder analytisch?

§ 12. Kant. Baumann. Lipschitz. Hankel. Die innere Anschauung als Erkenntnissgrund. 17

§ 13. Unterschied von Arithmetik und Geometrie 19

§ 14. Vergleichung der Wahrheiten in Bezug auf das von ihnen beherrschte Gebiet 20

§ 15. Ansichten von Leibniz und St. Jevons 21

§ 16. Dagegen Mills Herabsetzung des „kunstfertigen Handhabens der Sprache." Die Zeichen sind nicht darum leer, weil sie nichts Wahrnehmbares bedeuten 22

§ 17. Unzulänglichkeit der Induction. Vermuthung, dass die Zahlgesetze analytische Urtheile sind; worin dann ihr Nutzen besteht. Werthschätzung der analytischen Urtheile. . . 23

II. Meinungen einiger Schriftsteller über den Begriff der Anzahl.

§ 18. Nothwendigkeit den allgemeinen Begriff der Anzahl zu untersuchen. 24

§ 19. Die Definition darf nicht geometrisch sein. 25

§ 20. Ist die Zahl definirbar? Hankel. Leibniz. 26

Ist die Anzahl eine Eigenschaft der äussern Dinge?

§ 21. Meinungen von M. Cantor und E. Schröder 27

§ 22. Dagegen Baumann: die äussern Dinge stellen keine strengen Einheiten dar. Die Anzahl hängt scheinbar von unserer Auffassung ab 28

§ 23. Mills Meinung, dass die Zahl eine Eigenschaft des Aggregats von Dingen sei, ist unhaltbar 29

Seite

§ 24. Umfassende Anwendbarkeit der Zahl. Mill. Locke. Leibnizens unkörperliche metaphysische Figur. Wenn die Zahl etwas Sinnliches wäre, könnte sie nicht Unsinnlichem beigelegt werden 30

§ 25. Mills physikalischer Unterschied zwischen 2 und 3. Nach Berkeley ist die Zahl nicht realiter in den Dingen, sondern durch den Geist geschaffen 32

Ist die Zahl etwas Subjectives?

§ 26. Lipschitzs Beschreibung der Zahlbildung passt nicht recht und kann eine Begriffsbestimmung nicht ersetzen. Die Zahl ist kein Gegenstand der Psychologie, sondern etwas Objectives 33

§ 27. Die Zahl ist nicht, wie Schloemilch will, Vorstellung der Stelle eines Objects in einer Reihe 36

Die Anzahl als Menge.

§ 28. Thomaes Namengebung 38

III. Meinungen über Einheit und Eins.

Drückt das Zahlwort „Ein" eine Eigenschaft von Gegenständen aus?

§ 29. Vieldeutigkeit der Ausdrücke „μονάς" und „Einheit." E. Schröders Erklärung der Einheit als zu zählenden Gegenstandes ist scheinbar zwecklos. Das Adjectiv „Ein" enthält keine nähere Bestimmung, kann nicht als Praedicat dienen 39

§ 30. Nach den Definitionsversuchen von Leibniz und Baumann scheint der Begriff der Einheit gänzlich zu verschwimmen 41

§ 31. Baumanns Merkmale der Ungetheiltheit und Abgegrenztheit. Die Idee der Einheit wird uns nicht von jedem Objecte zugeführt (Locke) 41

§ 32. Doch deutet die Sprache einen Zusammenhang mit der Ungetheiltheit und Abgegrenztheit an, wobei jedoch der Sinn verschoben wird 42

§ 33. Die Untheilbarkeit (G. Köpp) ist als Merkmal der Einheit nicht haltbar 43

Sind die Einheiten einander gleich?

§ 34. Die Gleichheit als Grund für den Namen „Einheit." E. Schröder. Hobbes. Hume. Thomae. Durch Abstraction von den Verschiedenheiten der Dinge erhält man nicht den Begriff der Anzahl, und die Dinge werden dadurch nicht einander gleich 44

Seite

§ 35. Die Verschiedenheit ist sogar nothwendig, wenn von Mehrheit die Rede sein soll. Descartes. E Schröder. St. Jevons 46

§ 36. Die Ansicht von der Verschiedenheit der Einheiten stösst auch auf Schwierigkeiten. Verschiedene Einsen bei St. Jevons 46

§ 37. Lockes, Leibnizens, Hesses Erklärungen der Zahl aus der Einheit oder Eins 48

§ 38. „Eins“ ist Eigenname, „Einheit“ Begriffswort. Zahl kann nicht als Einheiten definirt werden. Unterschied von „und“ und + ... 48

§ 39. Die Schwierigkeit, Gleichheit und Unterscheidbarkeit der Einheiten zu versöhnen, wird durch die Vieldeutigkeit von „Einheit“ verdeckt 50

Versuche, die Schwierigkeit zu überwinden.

§ 40. Raum und Zeit als Mittel des Unterscheidens. Hobbes. Thomae. Dagegen: Leibniz, Baumann, St. Jevons . . . 51

§ 41. Der Zweck wird nicht erreicht 53

§ 42. Die Stelle in einer Reihe als Mittel des Unterscheidens. Hankels Setzen 54

§ 43. Schröders Abbildung der Gegenstände durch das Zeichen 1 54

§ 44. Jevons Abstrahiren vom Charakter der Unterschiede mit Festhaltung ihres Vorhandenseins. Die 0 und die 1 sind Zahlen wie die andern. Die Schwierigkeit bleibt bestehen 55

Lösung der Schwierigkeit.

§ 45. Rückblick 58

§ 46. Die Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriffe. Einwand, dass bei unverändertem Begriffe die Zahl sich ändere 59

§ 47. Die Thatsächlichkeit der Zahlangabe erklärt sich aus der Objectivität des Begriffes 60

§ 48. Auflösung einiger Schwierigkeiten 61

§ 49. Bestätigung bei Spinoza 62

§ 50. E. Schröders Ausführung 62

§ 51. Berichtigung derselben 63

§ 52. Bestätigung in einem deutschen Sprachgebrauche 64

§ 53. Unterschied zwischen Merkmalen und Eigenschaften eines Begriffes. Existenz und Zahl 64

§ 54. Einheit kann man das Subject einer Zahlangabe nennen. Untheilbarkeit und Abgegrenztheit der Einheit. Gleichheit und Unterscheidbarkeit 65

Seite

IV. Der Begriff der Anzahl.

Jede einzelne Zahl ist ein selbständiger Gegenstand.

§ 55. Versuch, die leibnizischen Definitionen der einzelnen Zahlen zu ergänzen 67
§ 56. Die versuchten Definitionen sind unbrauchbar, weil sie eine Aussage erklären, von der die Zahl nur ein Theil ist . . 67
§ 57. Die Zahlangabe ist als eine Gleichung zwischen Zahlen anzusehen 68
§ 58. Einwand der Unvorstellbarkeit der Zahl als eines selbständigen Gegenstandes. Die Zahl ist überhaupt unvorstellbar 69
§ 59. Ein Gegenstand ist nicht deshalb von der Untersuchung auszuschliessen, weil er unvorstellbar ist 70
§ 60. Selbst concrete Dinge sind nicht immer vorstellbar. Man muss die Wörter im Satze betrachten, wenn man nach ihrer Bedeutung fragt 71
§ 61. Einwand der Unräumlichkeit der Zahlen. Nicht jeder objective Gegenstand ist räumlich 72

Um den Begriff der Anzahl zu gewinnen, muss man den Sinn einer Zahlengleichung feststellen.

§ 62. Wir bedürfen eines Kennzeichens für die Zahlengleichheit 73
§ 63. Die Möglichkeit der eindeutigen Zuordnung als solches. Logisches Bedenken, dass die Gleichheit für diesen Fall besonders erklärt wird 73
§ 64. Beispiele für ein ähnliches Verfahren: die Richtung, die Stellung einer Ebene, die Gestalt eines Dreiecks 74
§ 65. Versuch einer Definition. Ein zweites Bedenken: ob den Gesetzen der Gleichheit genügt wird 76
§ 66. Drittes Bedenken: das Kennzeichen der Gleichheit ist unzureichend 77
§ 67. Die Ergänzung kann nicht dadurch geschehen, dass man zum Merkmal eines Begriffes die Weise nimmt, wie ein Gegenstand eingeführt ist 78
§ 68. Die Anzahl als Umfang eines Begriffes 79
§ 69. Erläuterung 80

Ergänzung und Bewährung unserer Definition.

§ 70. Der Beziehungsbegriff 81
§ 71. Die Zuordnung durch eine Beziehung 83
§ 72. Die beiderseits eindeutige Beziehung. Begriff der Anzahl 84

Seite

§ 73. Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist gleich der Anzahl, welche dem Begriffe G zukommt, wenn es eine Beziehung giebt, welche die unter F fallenden Gegenstände, den unter G fallenden beiderseits eindeutig zuordnet . . 85
§ 74. Null ist die Anzahl, welche dem Begriffe „sich selbst ungleich" zukommt 86
§ 75. Null ist die Anzahl, welche einem Begriffe zukommt, unter den nichts fällt. Kein Gegenstand fällt unter einen Begriff, wenn Null die diesem zukommende Anzahl ist 88
§ 76. Erklärung des Ausdrucks „n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m." 89
§ 77. 1 ist die Anzahl, welche dem Begriffe „gleich 0" zukommt 90
§ 78. Sätze, die mittels unserer Definitionen zu beweisen sind 91
§ 79. Definition des Folgens in einer Reihe 92
§ 80. Bemerkungen hierzu. Objectivität des Folgens 92
§ 81. Erklärung des Ausdrucks „x gehört der mit y endenden φ-Reihe an" 94
§ 82. Andeutung des Beweises, dass es kein letztes Glied der natürlichen Zahlenreihe giebt 94
§ 83. Definition der endlichen Anzahl. Keine endliche Anzahl folgt in der natürlichen Zahlenreihe auf sich selber . . . 95

Unendliche Anzahlen.

§ 84. Die Anzahl, welche dem Begriffe „endliche Anzahl" zukommt, ist eine unendliche 96
§ 85. Die cantorschen unendlichen Anzahlen; „Mächtigkeit". Abweichung in der Benennung 97
§ 86. Cantors Folgen in der Succession und mein Folgen in der Reihe 98

V. Schluss.

§ 87. Die Natur der arithmetischen Gesetze 99
§ 88. Kants Unterschätzung der analytischen Urtheile 99
§ 89. Kants Satz: „Ohne Sinnlichkeit würde uns kein Gegenstand gegeben werden". Kants Verdienst um die Mathematik 101
§ 90. Zum vollen Nachweis der analytischen Natur der arithmetischen Gesetze fehlt eine lückenlose Schlusskette . . . 102
§ 91. Abhilfe dieses Mangels ist durch meine Begriffsschrift möglich 103

Andere Zahlen.

§ 92. Sinn der Frage nach der Möglichkeit der Zahlen nach Hankel 104
§ 93. Die Zahlen sind weder räumlich ausser uns noch subjectiv 105

Seite

§ 94. Die Widerspruchslosigkeit eines Begriffes verbürgt nicht, dass etwas unter ihn falle, und bedarf selbst des Beweises . . 105
§ 95. Man darf nicht ohne Weiteres (c — b) als ein Zeichen ansehn, das die Subtractionsaufgabe löst 106
§ 96. Auch der Mathematiker kann nicht willkührlich etwas schaffen 107
§ 97. Begriffe sind von Gegenständen zu unterscheiden . . . 108
§ 98. Hankels Erklärung der Addition 108
§ 99. Mangelhaftigkeit der formalen Theorie 109
§ 100. Versuch, complexe Zahlen dadurch nachzuweisen, dass die Bedeutung der Multiplication in besonderer Weise erweitert wird 110
§ 101. Die Möglichkeit eines solchen Nachweises ist für die Kraft eines Beweises nicht gleichgiltig 111
§ 102. Die blosse Forderung, es solle eine Operation ausführbar sein, ist nicht ihre Erfüllung 111
§ 103. Kossaks Erklärung der complexen Zahlen ist nur eine Anweisung zur Definition und vermeidet nicht die Einmischung von Fremdartigem. Die geometrische Darstellung . . . 112
§ 104. Es kommt darauf an, den Sinn eines Wiedererkennungsurtheils für die neuen Zahlen festzusetzen 114
§ 105. Der Reiz der Arithmetik liegt in ihrem Vernunftcharakter 115
§ 106—109. Rückblick . . . . 115—119