

Ehrhard Behrends

# **Analysis Band 1**

**Ein Lernbuch für den sanften  
Wechsel von der Schule zur Uni**



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Die Menge <math>\mathbb{R}</math> der reellen Zahlen</b>	<b>1</b>
1.1 Vorbemerkungen . . . . .	3
Die Strategie: Wie wird das Axiomensystem für $\mathbb{R}$ hergeleitet?	
1.2 Mengen . . . . .	6
Mengen, Mengenoperationen, Abbildungen.	
1.3 Algebraische Strukturen . . . . .	16
Innere Kompositionen und ihre Eigenschaften, Körper, logischer Exkurs, Körper-eigenschaften.	
1.4 Angeordnete Körper . . . . .	33
Positivbereich, angeordnete Körper, Gegenbeispiele.	
1.5 Natürliche Zahlen, vollständige Induktion . . . . .	37
Definition von $\mathbb{N}$ , Induktion, Musterbeweise, Eigenschaften von $\mathbb{N}$ .	
1.6 Die ganzen und die rationalen Zahlen . . . . .	48
$\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ , Dichtheitssatz.	
1.7 Das Archimedesaxiom . . . . .	52
Archimedesaxiom und Folgerungen.	
1.8 Vollständigkeit . . . . .	56
Dedekindsche Schnitte, Schnittzahlen, Vollständigkeit, das Axiomensystem für $\mathbb{R}$ .	
1.9 Von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ . . . . .	58
Der Körper $\mathbb{C}$ , Eigenschaften.	
1.10 Wie groß ist $\mathbb{R}$ ? . . . . .	62
Ergänzungen zur Mengenlehre, Mengen mit gleicher Kardinalzahl, abzählbar und überabzählbar, die Cantorsche Diagonalverfahren.	
1.11 Ergänzungen . . . . .	68
Peano-Axiome, der „konstruktive“ Aufbau der reellen Zahlen, Gleichheit in der Mathematik, Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$ , Sicherheit der Grundlagen.	
1.12 Verständnisfragen . . . . .	77
1.13 Übungsaufgaben . . . . .	81

<b>2</b>	<b>Folgen und Reihen</b>	<b>87</b>
2.1	Folgen . . . . .	89
	Folgen, Teilfolgen, Umordnungen.	
2.2	Konvergenz . . . . .	93
	Betrag in $\mathbb{R}$ , Existenz der Wurzel, Betrag in $\mathbb{C}$ , Nullfolge, Konvergenz, Konvergenzbeweise.	
2.3	Cauchy-Folgen und Vollständigkeit . . . . .	120
	Cauchy-Folgen, Zusammenhang zur Konvergenz, Ordnungsrelationen, Supremum und Infimum, äquivalente Versionen der Vollständigkeit.	
2.4	Unendliche Reihen . . . . .	133
	Reihen, Konvergenzkriterien, absolut konvergente Reihen.	
2.5	Ergänzungen . . . . .	148
	Dezimalentwicklung, ungeordnete Summation, Folgenräume.	
2.6	Verständnisfragen . . . . .	160
2.7	Übungsaufgaben . . . . .	163
<b>3</b>	<b>Metrische Räume und Stetigkeit</b>	<b>167</b>
3.1	Metrische Räume . . . . .	167
	Metriken und Normen, Konvergenz, Kugeln, offene und abgeschlossene Teilmengen, Abschluss und Inneres, dichte Teilmengen.	
3.2	Kompaktheit . . . . .	187
	Kompaktheit, Kompaktheitskriterien, Charakterisierung der kompakten Teilmengen endlich-dimensionaler Räume, Zweipunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}$ .	
3.3	Stetigkeit . . . . .	199
	Stetige Funktionen, Lipschitzabbildungen, Permanenzeigenschaften, Charakterisierung, Zwischenwertsatz, Satz vom Maximum, gleichmäßige Stetigkeit.	
3.4	Verständnisfragen . . . . .	223
3.5	Übungsaufgaben . . . . .	227
<b>4</b>	<b>Differentiation (eine Veränderliche)</b>	<b>229</b>
4.1	Differenzierbare Funktionen . . . . .	230
	Stetige Ergänzung, differenzierbare Funktionen, Ableitungsregeln.	
4.2	Mittelwertsätze . . . . .	245
	Satz von Rolle, Mittelwertsätze, Regeln von l'Hôpital.	
4.3	Taylorpolynome . . . . .	260
	Taylor-Polynome, Restglied, Restgliedformel, Extremwertaufgaben.	
4.4	Potenzreihen . . . . .	272
	Potenzreihen, Konvergenzradius, Limes superior und Limes inferior, Formel für den Konvergenzradius, Differenzierbarkeit von Potenzreihen, entwickelbare Funktionen, das Gegenbeispiel von Cauchy.	
4.5	Spezielle Funktionen . . . . .	293
	Zwei Differentialgleichungen zur Motivation, Exponentialfunktion, Logarithmus, allgemeine Potenz, Sinus und Cosinus, die speziellen Funktionen im Komplexen, Polardarstellung.	
4.6	Fundamentalsatz, Differentialgleichungen . . . . .	320
	Fundamentalsatz, Lösung spezieller Typen von Differentialgleichungen.	
4.7	Verständnisfragen . . . . .	334
4.8	Übungsaufgaben . . . . .	338

*INHALTSVERZEICHNIS*

xiii

<b>Anhänge</b>	<b>343</b>
Computeralgebra . . . . .	344
Mathematik und neue Medien . . . . .	346
Die Internetseite zum Buch . . . . .	347
Griechische Symbole . . . . .	348
Lösungen zu den „?“ . . . . .	349
Register . . . . .	355