

# NUMERIK 1

## Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Rolf Rannacher

Institut für Angewandte Mathematik  
Universität Heidelberg

# Inhaltsverzeichnis

<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>0 Einleitung</b>	<b>1</b>
0.1 Einführung in die Problemstellung . . . . .	1
0.2 Beispiele von gewöhnlichen Differentialgleichungen . . . . .	3
0.3 Lösungsmethoden . . . . .	7
0.4 Prinzipien der Verfahrensanalyse . . . . .	10
0.5 Ausblick auf partielle Differentialgleichungen . . . . .	11
<b>1 Aus der Theorie der Anfangswertaufgaben</b>	<b>13</b>
1.1 Existenzsätze . . . . .	13
1.1.1 Existenz von Lösungen . . . . .	13
1.1.2 Konstruktion von Lösungen . . . . .	20
1.2 Eindeutigkeit und Stabilität von Lösungen . . . . .	22
1.2.1 Lokale Stabilität und Eindeutigkeit . . . . .	22
1.2.2 Globale Stabilität . . . . .	31
1.3 Homogene lineare Systeme . . . . .	36
1.4 Übungsaufgaben . . . . .	39
<b>2 Einschrittmethoden</b>	<b>43</b>
2.1 Die Eulersche Polygonzugmethode . . . . .	43
2.2 Allgemeine Einschrittmethoden . . . . .	46
2.2.1 Lokale Konvergenz und Fehlerabschätzungen . . . . .	50
2.2.2 Globale Konvergenz . . . . .	53
2.3 Schrittweitenkontrolle . . . . .	57
2.3.1 Schätzung des Abschneidefehlers . . . . .	60
2.3.2 Adaptive Schrittweitensteuerung . . . . .	61
2.3.3 Numerischer Test . . . . .	63
2.4 Übungsaufgaben . . . . .	64
<b>3 Numerische Stabilität</b>	<b>73</b>
3.1 Modellproblemanalyse . . . . .	73

3.1.1	Steife Probleme . . . . .	83
3.1.2	Implizite Verfahren . . . . .	85
3.2	Lösung monotoner Probleme: Newton-Verfahren . . . . .	87
3.3	Übungsaufgaben . . . . .	95
<b>4</b>	<b>Lineare Mehrschrittmethoden</b>	<b>99</b>
4.1	Konstruktion linearer Mehrschrittformeln . . . . .	99
4.2	Stabilität und Konvergenz . . . . .	102
4.3	Numerische Stabilität linearer Mehrschrittmethoden . . . . .	114
4.4	Praktische Aspekte . . . . .	119
4.4.1	Berechnung von Startwerten . . . . .	120
4.4.2	Lösung der impliziten Gleichungssysteme . . . . .	120
4.4.3	Prädiktor-Korrektor-Methode . . . . .	121
4.4.4	Fehlerschätzung und Schrittweitensteuerung: „Milne Device“ . . . . .	123
4.5	Übungsaufgaben . . . . .	124
<b>5</b>	<b>Extrapolationsmethode</b>	<b>127</b>
5.1	Das Extrapolationsprinzip . . . . .	127
5.2	Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	132
5.2.1	Numerischer Test . . . . .	137
5.3	Übungsaufgaben . . . . .	137
<b>6</b>	<b>Differentiell-algebraische Gleichungen (DAE)</b>	<b>141</b>
6.1	Theorie differentiell-algebraischer Gleichungen . . . . .	143
6.2	Numerik differentiell-algebraischer Gleichungen . . . . .	145
6.3	Übungsaufgaben . . . . .	148
<b>7</b>	<b>Galerkin-Verfahren</b>	<b>151</b>
7.1	Variationelle Formulierung der Anfangswertaufgaben . . . . .	151
7.2	Das „unstetige“ Galerkin-Verfahren . . . . .	152
7.2.1	Beispiele . . . . .	154
7.2.2	Lösbarkeit der Galerkin-Gleichungen . . . . .	155
7.2.3	Andere Arten von Galerkin-Verfahren . . . . .	159
7.3	A priori Fehleranalyse . . . . .	160

---

7.4	A posteriori Fehlerschätzung und Schrittweitensteuerung . . . . .	168
7.4.1	Allgemeines zur a posteriori Fehleranalyse . . . . .	168
7.4.2	Realisierung für das dG-Verfahren . . . . .	171
7.4.3	Auswertung der a posteriori Fehlerabschätzung . . . . .	176
7.4.4	Adaptive Schrittweitenwahl beim dG(0)-Verfahren . . . . .	181
7.4.5	Vergleich zwischen dG- und Differenzen-Verfahren . . . . .	182
7.5	Übungsaufgaben . . . . .	187
<b>8</b>	<b>Aus der Theorie der Randwertaufgaben</b>	<b>191</b>
8.1	Existenz- und Eindeutigkeitssätze . . . . .	191
8.1.1	Allgemeine Randwertaufgaben . . . . .	191
8.1.2	Sturm-Liouville-Probleme . . . . .	195
8.2	Übungsaufgaben . . . . .	197
<b>9</b>	<b>Schießverfahren</b>	<b>199</b>
9.1	Lineare Randwertaufgaben . . . . .	199
9.2	Nichtlineares Schießverfahren . . . . .	206
9.3	Übungsaufgaben . . . . .	212
<b>10</b>	<b>Differenzenverfahren</b>	<b>213</b>
10.1	Systeme erster Ordnung . . . . .	213
10.2	Sturm-Liouville-Probleme . . . . .	220
10.2.1	Konditionierung . . . . .	229
10.3	Übungsaufgaben . . . . .	230
<b>11</b>	<b>Variationsmethoden</b>	<b>233</b>
11.1	Allgemeines Ritz-Galerkin-Verfahren . . . . .	233
11.2	Methode der finiten Elemente . . . . .	238
11.2.1	„Lineare“ finite Elemente . . . . .	238
11.2.2	Finite Elemente höherer Ordnung . . . . .	242
11.2.3	Der transport-dominante Fall . . . . .	243
11.2.4	A posteriori Fehleranalyse . . . . .	245
11.3	Übungsaufgaben (zur Überprüfung des Kenntnisstandes) . . . . .	247

<b>12 Ausblick auf partielle Differentialgleichungen</b>	<b>251</b>
12.1 Transportgleichung (hyperbolisches Problem)	251
12.1.1 Differenzenverfahren	252
12.1.2 Finite-Elemente-Galerkin-Verfahren	256
12.2 Wärmeleitungsgleichung (parabolisches Problem)	258
12.2.1 Diskretisierungsverfahren	260
12.3 Laplace-Gleichung (elliptisches Problem)	264
12.3.1 Differenzenverfahren	265
12.3.2 Finite-Elemente-Galerkin-Verfahren	268
<b>A Lösungen der Übungsaufgaben</b>	<b>271</b>
A.1 Kapitel 1	271
A.2 Kapitel 2	275
A.3 Kapitel 3	291
A.4 Kapitel 4	301
A.5 Kapitel 5	307
A.6 Kapitel 6	311
A.7 Kapitel 7	313
A.8 Kapitel 8	325
A.9 Kapitel 9	327
A.10 Kapitel 10	330
A.11 Kapitel 11	335
<b>Index</b>	<b>341</b>