

Wolfgang Niemeier

Ausgleichungsrechnung

Eine Einführung für Studierende und Praktiker
des Vermessungs- und Geoinformationswesens



Walter de Gruyter
Berlin · New York 2002



Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
1 Beurteilung von Messungsgrößen	1
1.1 Zufallsvariable	1
1.1.1 Messgrößen – Mittelwerte – Genauigkeiten	2
1.1.2 Mittelwert-Parameter	3
1.1.3 Genauigkeits-Maße	4
1.2 Klassifizierung von Fehlern	7
1.2.1 Zuordnungsfehler	7
1.2.2 Völlig falsche Messwerte $> 20 - 50 \sigma$	8
1.2.3 Grobe Fehler – Ausreißer $> (3 - 5) \sigma$ bis $(20 - 50) \sigma$	8
1.2.4 Zufällige Abweichungen – Messungenauigkeiten	9
1.2.5 Truncation Error – Fehler durch Stellenabbruch	9
1.2.6 Modellfehler	10
1.3 Beschreibende Statistik	11
1.3.1 Häufigkeitsverteilung	11
1.3.2 Wahrscheinlichkeitsfunktionen	14
1.3.3 Erwartungswerte	16
1.3.4 Rechnen mit Erwartungswerten	17
1.4 Der zweidimensionale Zufallsvektor	19
1.4.1 Definitionen	19
1.4.2 Kovarianz und Korrelation	20
1.4.3 Berechnung von Kovarianzen und Korrelation	23
1.4.4 Autokovarianzfunktion	27
1.5 Der m -dimensionale Zufallsvektor	28
1.5.1 Definitionen	29
1.5.2 Berechnung von Kovarianzen und Korrelationen	30
1.5.3 Erwartungswerte für Funktionen der Zufallsvariablen	31
1.6 Normalverteilung	33
1.6.1 Definition und Eigenschaften	33
1.6.2 Begründungen für die Normalverteilung	35
1.6.3 Standard-Normalverteilung	36
1.6.4 Dichtefunktion der mehrdimensionalen Normalverteilung	39

2 Varianz-Fortpflanzung	41
2.1 Einführung	41
2.2 Lineare Funktionen	42
2.2.1 Herleitung über wahre Residuen	42
2.2.2 Anwendungen: „Summe und Differenz“	44
2.2.3 Allgemeine Form des Varianz-Fortpflanzungs-Gesetzes	46
2.2.4 Anwendungen: Lineare Funktionen mit Korrelation	47
2.3 Nichtlineare Funktionen	51
2.3.1 Linearisierung	52
2.3.2 Varianz-Fortpflanzung nach Linearisierung	53
2.3.3 Alternative Formulierung	54
2.3.4 Hilfsmittel: Differenzen-Quotienten	54
2.3.5 Anwendungen: Nichtlineare Funktionen	55
3 Konfidenzbereiche und statistische Tests	62
3.1 Vorbemerkung	62
3.2 Testverteilung	63
3.2.1 Die Chi-Quadrat-Verteilung (χ^2 -Verteilung)	64
3.2.2 Die Student-Verteilung	66
3.2.3 Die Fisher-Verteilung	68
3.2.4 Beziehungen zwischen F -, χ^2 - und t -Verteilung	69
3.2.5 Nichtzentralität einer Verteilung	70
3.3 Berechnung von Konfidenzbereichen	72
3.3.1 Konfidenzbereich für μ mit bekanntem σ^2	72
3.3.2 Konfidenzbereich für μ mit nicht bekanntem σ^2	75
3.3.3 Konfidenzbereich für die Varianz σ^2	76
3.4 Grundzüge der statistischen Testtheorie	78
3.4.1 Ausgangsüberlegung	78
3.4.2 Aufbau eines statistischen Tests	79
3.4.3 Fehlschluss 1. und 2. Art	80
3.4.4 Ein- und zweiseitige Fragestellung	81
3.5 Differenztest für zwei Mittelwerte	81
3.5.1 Testablauf bei bekannter Varianz σ^2	82
3.5.2 Testgüte	84
3.5.3 Testablauf bei geschätzter Varianz	86
3.6 Signifikanztest für zwei empirische Varianzen	90
4 Grundlagen der Ausgleichsrechnung	93
4.1 Ausgangsüberlegungen	93
4.1.1 Punktbestimmung in der Ebene	93
4.1.2 Funktionale Zusammenhänge – Regression	95
4.1.3 Transformation von Koordinaten	96

4.2	Konzepte zur Modellbildung	98
4.2.1	Messungsgrößen – Koordinaten/Parameter	98
4.2.2	Funktionales Modell	100
4.2.3	Linearisierung der Beobachtungsgleichungen	102
4.2.4	Stochastisches Modell	104
4.2.5	Koordinaten als Parameter in geodätischen Netzen	106
4.3	Die Methode der kleinsten Quadrate	108
4.3.1	Ausgleichungsansatz für ein Nivellementsnetz	109
4.3.2	Parameterschätzung für gleichgenaue Beobachtungen	112
4.3.3	Herleitung des Ausgleichungsansatzes aus der Statistik	114
4.3.4	Parameterschätzungen für Beobachtungen mit Kovarianzinformationen	117
4.3.5	Kovarianzmatrix für den Parametervektor $\hat{\mathbf{x}}$	120
4.3.6	Kovarianzmatrix für Funktionen der Parameter	121
4.3.7	Ablauf der Berechnung und Proben	122
4.4	Beispiele für Ausgleichungsaufgaben	128
4.4.1	Bestimmung eines Neupunktes	128
4.4.2	Beispiel Nivellementsnetz	133
4.4.3	Vermittelnde Ausgleichung eines Netzes	135
4.5	Beurteilung der Ausgleichungsansätze	142
4.5.1	Genauigkeitsniveau der Messungen	142
4.5.2	Zum Modellcharakter der Ausgleichungsansätze	146
4.5.3	Globaltest des Ausgleichungsmodells	147
5	Bedingungen und Restriktionen im Ausgleichungsmodell	152
5.1	Einführung und Begründung	152
5.2	Der Allgemeinfall der Ausgleichungsrechnung	153
5.2.1	Aufstellen des funktionalen Modells	153
5.2.2	Lösung der Ausgleichungsaufgabe	156
5.2.3	Genauigkeitsmaße und Kofaktormatrizen	158
5.2.4	Beispiel: Bestimmung eines Kreises (Fortsetzung)	160
5.3	Bedingte Ausgleichung	161
5.3.1	Aufstellen des funktionalen Modells	161
5.3.2	Lösungsalgorithmus	163
5.3.3	Funktionen der ausgeglichenen Beobachtungen	164
5.3.4	Beispiel: Ausgleichung eines Nivellementsnetzes	165
5.4	Restriktionen und Hypothesentests	167
5.4.1	Einführung	167
5.4.2	Allgemeine Form einer linearen Hypothese	168
5.4.3	Herleitung der Teststatistik	171
5.4.4	Implizite Hypothesenformulierung	174
5.5	Bedingungen als „fiktive Beobachtungen“	177

5.5.1	Allgemeiner Modellansatz	177
5.5.2	Koordinaten als fiktive Beobachtungen	178
5.5.3	Rechtwinkelbedingungen als fiktive Beobachtungen	179
5.5.4	Geradheitsbedingungen als fiktive Beobachtungen	180
6	Robuste Parameterschätzung	182
6.1	Einführung	182
6.2	Ausgangsbetrachtungen	183
6.2.1	Schätzfunktionen	183
6.2.2	Einflussfunktionen	184
6.2.3	Verlustfunktionen	186
6.3	Modellansätze der robusten Parameterschätzung	187
6.3.1	Das stochastische Modell	187
6.3.2	Herleitung der Schätzfunktion	188
6.3.3	M-Schätzer	190
6.3.4	L-Schätzer	192
6.3.5	Ls-Norm-Schätzer	193
6.4	Eigenschaften robuster Schätzverfahren	195
6.4.1	Hebelpunkte/Hebelbeobachtungen	196
6.4.2	Bruchpunkte	198
6.4.3	Modifizierte M-Schätzer	199
6.5	Praktische Handhabung der modifizierten M-Schätzer	202
7	Datumsproblematik	205
7.1	Singuläre Ausgleichungsmodelle	205
7.1.1	Einführung	205
7.1.2	Pragmatische Lösung für ein Höhennetz	208
7.1.3	Datumsdefekte und freie Datumparameter	211
7.1.4	Konfigurationsdefekte	214
7.1.5	Pragmatische Lösung für ein Lagenetz	214
7.1.6	Lösung durch Spektralzerlegung	216
7.1.7	Beziehungen zwischen den Bedingungsgleichungen G und B	218
7.2	Datumsfreies Konzept	219
7.2.1	Ausgangsüberlegung	219
7.2.2	Einführung von Zusatzparametern	220
7.2.3	Auswirkung in praktischen Netzen	226
7.2.4	Kombinierte Ausgleichung von terrestrischen und GPS-Messungen	228
7.3	Datumsfestlegung in geodätischen Netzen	230
7.3.1	Zwangsfreie Lagerung	230
7.3.2	Gesamtpurminimierung	234

7.3.3	Teilspurminimierung	235
7.3.4	Hierarchische Ausgleichung	238
7.3.5	Weiche Lagerung	240
7.4	Lösung eines singulären Ausgleichungsproblems mit Bedingungen .	241
7.4.1	Zusatzbedingungen im Modell der parametrischen Ausgleichung	241
7.4.2	Herleitung der Submatrizen	243
7.4.3	Optimaleigenschaften von $\mathbf{Q}_{11}$	244
7.4.4	Hauptlösung $\hat{\mathbf{x}}$	246
7.5	S-Transformation	247
7.5.1	Herleitung der S-Transformationen	247
7.5.2	Anwendung der S-Transformation für ein Höhenetz	249
8	Qualitätsbeurteilung	251
8.1	Der Begriff „Qualität“	251
8.2	Beurteilung der Genauigkeit	252
8.2.1	Ausgleichungsmodell und Kovarianzmatrix Σ_{xx}	252
8.2.2	Lokale Genauigkeitskriterien	255
8.2.3	Globale Genauigkeitskriterien	263
8.3	Beurteilung der Zuverlässigkeit	268
8.3.1	Einführung in das Konzept Zuverlässigkeit	268
8.3.2	Redundanzanteile und Ausreißertests	270
8.3.3	Minimal aufdeckbare Ausreißer	273
8.3.4	Teststatistik für zusätzliche Parameter	275
8.3.5	Eindimensionale Alternativhypothesen	279
8.3.6	Abstimmung des Testniveaus	281
8.3.7	Maße für die äußere Zuverlässigkeit	283
9	Spezielle Aspekte	286
9.1	Eliminieren von Parametern	286
9.1.1	Aufgabenstellung	286
9.1.2	Eliminierung durch Blockzerlegung	286
9.1.3	Mittlere Verbesserungsgleichung	289
9.1.4	Fingierte Verbesserungsgleichungen nach Schreiber	291
9.2	Varianzkomponentenschätzung	293
9.2.1	Schätzung eines Varianzfaktors	296
9.2.2	Schätzung der einzelnen Varianzkomponenten	297
9.2.3	Praktischer Berechnungsablauf	299
9.3	Bestimmung von Näherungskordinaten	301
9.3.1	Problemstellung	301
9.3.2	Iterative Ausgleichung	302
9.3.3	Herkömmliche Ansätze	303

9.3.4	Spezielle Modelle: Direkter Ansatz	305
9.3.5	Strategie für 3D-Netze	307
10	Transformationen	309
10.1	Einleitung	309
10.2	Modelle für Koordinatentransformationen	310
10.2.1	Helmert-Transformation	310
10.2.2	Affin-Transformation	311
10.2.3	Polynomiale Transformation	313
10.2.4	Dreidimensionale Helmert-Transformation	313
10.3	Schätzung der Transformationsparameter	315
10.3.1	Schätzung der Parameter der Helmert-Transformation	315
10.3.2	Kovarianzmatrizen und Ausreißertests bei der Helmert-Transformation	318
10.3.3	Direkte Transformation von GPS-Datensätzen	320
10.3.4	Zweistufige Integration von GPS-Datensätzen	321
10.4	Robuste Transformationen	324
10.4.1	Allgemeines	324
10.4.2	L1-Schätzung	325
10.4.3	LMS-Schätzung	326
10.4.4	Modifizierter M-Schätzer (BIBER)	328
10.5	Nachbarschaftstreue Anpassung	328
10.5.1	Problemstellung	328
10.5.2	Maschenweise Affin-Transformation	329
10.5.3	Abstandsgewichte	330
10.5.4	Multiquadratische Interpolation	331
10.6	Numerisches Beispiel	332
10.6.1	Ausgangsdaten	332
10.6.2	Helmert-Transformation	333
10.6.3	Affin-Transformation	334
10.6.4	Maschenweise Affin-Transformation	335
10.6.5	L1-Helmert-Transformation	336
10.6.6	LMS-Schätzung	337
11	Regression und Kollokation	338
11.1	Einführung	338
11.2	Lineare Regression bei zwei Variablen	340
11.2.1	Ausgangsmodell und Parameterschätzung	340
11.2.2	Übergang zu schwerpunktbezogenen Größen	342
11.2.3	Regression von x auf y	343
11.2.4	Beispiel: Regressionsgerade	344
11.3	Multiple lineare Regression	347

11.3.1 Ausgangsmodell	347
11.3.2 Qualitative Merkmale	348
11.3.3 Merkmalsabstand – Versuchsplanung	348
11.3.4 Nichtlinearitäten	349
11.3.5 Beispiel: Regressionsebene	350
11.4 Qualitätsbeurteilung der Regression	353
11.5 Test der Regressionsparameter	354
11.5.1 Globaltest	354
11.5.2 Test einzelner Parameter	356
11.6 Kollokation	357
11.6.1 Einführung	357
11.6.2 Kovarianzfunktionen	358
11.6.3 Kollokationsansatz	359
11.6.4 Schätzungen für die Zielfunktion	360
12 Kongruenztests und Kalman-Filterung	365
12.1 Zeitliche Komponenten im Vermessungswesen	365
12.2 Kongruenzprüfung	367
12.2.1 Ausgangssituation	367
12.2.2 Globaler Kongruenztest für zwei Epochen	369
12.2.3 Implizite Hypothesenformulierung	372
12.2.4 Berücksichtigung einer unterschiedlichen Konfiguration	372
12.3 Bestimmung der Verschiebungen	375
12.3.1 Referenzpunkte	375
12.3.2 Lokalisierung von Einzelpunktverschiebungen	376
12.4 Diskrete Kalman-Filterung	380
12.4.1 Grundlagen der Systemtheorie	380
12.4.2 Aufgabenformulierung für die Kalman-Filterung	382
12.4.3 Berechnungsablauf für die diskrete Kalman-Filterung	384
A Tafeln der Verteilungen	389
Literatur	395
Index	403