

Mikio Nakahara

Differentialgeometrie, Topologie und Physik

Aus dem Englischen übersetzt von
Dr. Matthias Delbrück

 Springer Spektrum

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur ersten Auflage	XV
Vorwort zur zweiten Auflage	XIX
Zur Nutzung dieses Buches	XXI
Notation und Konventionen	XXII
1 Quantenphysik	1
1.1 Analytische Mechanik	1
1.1.1 Newton'sche Mechanik	1
1.1.2 Lagrange-Formalismus	2
1.1.3 Hamilton-Formalismus	6
1.2 Kanonische Quantisierung	10
1.2.1 Hilbert-Raum, Bras und Kets	10
1.2.2 Axiome der kanonischen Quantisierung	11
1.2.3 Heisenberg-Gleichung, Heisenberg-Bild und Schrödinger-Bild	14
1.2.4 Wellenfunktionen	15
1.2.5 Harmonischer Oszillator	18
1.3 Pfadintegral-Quantisierung für ein Boson	20
1.3.1 Pfadintegral-Quantisierung	20
1.3.2 Imaginäre Zeit und Zustandssumme	28
1.3.3 Zeitgeordnetes Produkt und erzeugendes Funktional	29
1.4 Harmonischer Oszillator	32
1.4.1 Übergangsamplitude	32
1.4.2 Zustandssumme	36
1.5 Pfadintegral-Quantisierung eines Fermi-Teilchens	40
1.5.1 Fermionischer harmonischer Oszillator	40
1.5.2 Graßmann-Kalkül	41
1.5.3 Differenziation	43
1.5.4 Integration	43
1.5.5 Delta-Funktion	44
1.5.6 Gauß-Integral	45
1.5.7 Variationsableitung	46
1.5.8 Komplexe Konjugation	47
1.5.9 Kohärente Zustände und Vollständigkeitsrelation	47
1.5.10 Zustandssumme eines fermionischen Oszillators	48

1.6	Quantisierung eines skalaren Felds	52
1.6.1	Freies skalares Feld	52
1.6.2	Wechselwirkendes skalares Feld	55
1.7	Quantisierung eines Dirac-Felds	56
1.8	Eichtheorien	57
1.8.1	Abel'sche Eichtheorien	57
1.8.2	Nicht-Abel'sche Eichtheorien	59
1.8.3	Higgs-Felder	61
1.9	Magnetische Monopole	62
1.9.1	Dirac-Monopole	62
1.9.2	Der Wu-Yang-Monopol	63
1.9.3	Ladungsquantisierung	64
1.10	Instantonen	65
1.10.1	Einführung	65
1.10.2	Die (anti-)selbstduale Lösung	66
	Aufgabe	67
2	Mathematische Grundlagen	69
2.1	Abbildungen	69
2.1.1	Definitionen	69
2.1.2	Äquivalenzrelation und Äquivalenzklasse	72
2.2	Vektorräume	78
2.2.1	Vektoren und ihre Räume	78
2.2.2	Lineare Abbildungen, Bilder und Kerne	79
2.2.3	Dualer Vektorraum	80
2.2.4	Inneres Produkt und Adjungierte	81
2.2.5	Tensoren	83
2.3	Topologische Räume	84
2.3.1	Definitionen	84
2.3.2	Stetige Abbildungen	85
2.3.3	Umgebungen und Hausdorff-Räume	86
2.3.4	Abgeschlossene Mengen	86
2.3.5	Kompaktheit	87
2.3.6	Zusammenhang	88
2.4	Homöomorphismen und topologische Invarianten	89
2.4.1	Homöomorphismen	89
2.4.2	Topologische Invarianten	90
2.4.3	Homotopietyp	92
2.4.4	Euler-Charakteristik: ein Beispiel	92
	Aufgaben	96

3	Homologiegruppen	99
3.1	Abel'sche Gruppen	100
3.1.1	Elementare Gruppentheorie	100
3.1.2	Endlich erzeugte Abel'sche Gruppen und freie Abel'sche Gruppen	102
3.1.3	Zyklische Gruppen	103
3.2	Simplexe und Simplicialkomplexe	104
3.2.1	Simplexe	105
3.2.2	Simplicialkomplexe und Polyeder	106
3.3	Homologiegruppen von Simplicialkomplexen	107
3.3.1	Orientierte Simplexe	107
3.3.2	Kettengruppe, Zyklengruppe und Rändergruppe	109
3.3.3	Homologiegruppen	113
3.3.4	Bestimmung von $H_0(K)$	116
3.3.5	Weitere Homologieberechnungen	117
3.4	Allgemeine Eigenschaften von Homologiegruppen	123
3.4.1	Zusammenhang und Homologiegruppen	123
3.4.2	Struktur von Homologiegruppen	124
3.4.3	Betti-Zahlen und der Euler-Poincaré-Satz	124
	Aufgaben	125
4	Homotopiegruppen	127
4.1	Fundamentalgruppen	127
4.1.1	Grundlagen	127
4.1.2	Pfade und Schleifen	128
4.1.3	Homotopie	129
4.1.4	Fundamentalgruppen	131
4.2	Allgemeine Eigenschaften von Fundamentalgruppen	133
4.2.1	Bogenweiser Zusammenhang und Fundamentalgruppen	133
4.2.2	Homotope Invarianz von Fundamentalgruppen	134
4.3	Beispiele für Fundamentalgruppen	138
4.3.1	Fundamentalgruppe des Torus	140
4.4	Fundamentalgruppen von Polyedern	141
4.4.1	Freie Gruppen und Relationen	141
4.4.2	Bestimmung der Fundamentalgruppen von Polyedern	143
4.4.3	Relationen zwischen $H_1(K)$ und $\pi_1(K)$	152
4.5	Höhere Homotopiegruppen	153
4.5.1	Definitionen	153
4.6	Allgemeine Eigenschaften von höheren Homotopiegruppen	155
4.6.1	Die Abel'sche Natur höherer Homotopiegruppen	155
4.6.2	Bogenweiser Zusammenhang und höhere Homotopie- gruppen	155

4.6.3	Homotopieinvarianz von höheren Homotopiegruppen	156
4.6.4	Höhere Homotopiegruppen eines Produktraums	156
4.6.5	Universelle Überlagerungsräume und höhere Homotopiegruppen	156
4.7	Beispiele für höhere Homotopiegruppen	158
4.8	Ordnung in kondensierter Materie	161
4.8.1	Ordnungsparameter	161
4.8.2	Suprafluides ^4He und Supraleiter	163
4.8.3	Allgemeine Überlegungen	165
4.9	Defekte in nematischen Flüssigkristallen	167
4.9.1	Ordnungsparameter von nematischen Flüssigkristallen	167
4.9.2	Liniendefekte in nematischen Flüssigkristallen	168
4.9.3	Punktdefekte in nematischen Flüssigkristallen	169
4.9.4	Höherdimensionale Textur	170
4.10	Texturen in suprafluidem $^3\text{He-A}$	172
4.10.1	Suprafluides $^3\text{He-A}$	172
4.10.2	Liniendefekte und nichtsinguläre Wirbel in $^3\text{He-A}$	174
4.10.3	Shankar-Monopole in $^3\text{He-A}$	174
	Aufgaben	176
5	Mannigfaltigkeiten	177
5.1	Mannigfaltigkeiten	177
5.1.1	Heuristische Einführung	177
5.1.2	Definitionen	180
5.1.3	Beispiele	182
5.2	Analysis auf Mannigfaltigkeiten	187
5.2.1	Differenzierbare Abbildungen	187
5.2.2	Vektoren	190
5.2.3	1-Formen	193
5.2.4	Tensoren	194
5.2.5	Tensorfelder	194
5.2.6	Induzierte Abbildungen	195
5.2.7	Untermannigfaltigkeiten	197
5.3	Flüsse und Lie-Ableitungen	198
5.3.1	Einparametrische Transformationsgruppe	199
5.3.2	Lie-Ableitungen	201
5.4	Differentialformen	205
5.4.1	Definitionen	206
5.4.2	Äußere Ableitungen	208
5.4.3	Inneres Produkt und Lie-Ableitung von Formen	211
5.5	Integration von Differentialformen	214
5.5.1	Orientierung	214
5.5.2	Integration von Formen	215
5.6	Lie-Gruppen und Lie-Algebren	217
5.6.1	Lie-Gruppen	217

5.6.2	Lie-Algebren	219
5.6.3	Die einparametrische Untergruppe	223
5.6.4	Maurer-Cartan-Gleichung	225
5.7	Die Wirkung von Lie-Gruppen auf Mannigfaltigkeiten	227
5.7.1	Definitionen	227
5.7.2	Orbits und Isotropiegruppen	230
5.7.3	Induzierte Vektorfelder	234
5.7.4	Die adjungierte Darstellung	235
	Aufgaben	235
6	De-Rham-Kohomologiegruppen	237
6.1	Der Stokes'sche Satz	237
6.1.1	Vorüberlegung	237
6.1.2	Der Stokes'sche Satz	239
6.2	De-Rham-Kohomologiegruppen	241
6.2.1	Definitionen	241
6.2.2	Dualität von $H_r(M)$ und $H^r(M)$ und der Satz von de Rham	244
6.3	Das Poincaré-Lemma	247
6.4	Struktur von De-Rham-Kohomologiegruppen	249
6.4.1	Poincaré-Dualität	249
6.4.2	Kohomologieringe	249
6.4.3	Die Künneth-Formel	250
6.4.4	Rücktransport von De-Rham-Kohomologiegruppen	252
6.4.5	Homotopie und $H^1(M)$	252
7	Riemann'sche Geometrie	255
7.1	Riemann'sche und pseudo-Riemann'sche Mannigfaltigkeiten	255
7.1.1	Metrische Tensoren	255
7.1.2	Induzierte Metrik	257
7.2	Paralleltransport, Zusammenhang und kovariante Ableitung	258
7.2.1	Heuristische Einführung	258
7.2.2	Affine Zusammenhänge	261
7.2.3	Paralleltransport und Geodäten	262
7.2.4	Die kovariante Ableitung von Tensorfeldern	263
7.2.5	Transformationseigenschaften von Zusammenhangskoeffizienten	264
7.2.6	Der metrische Zusammenhang	264
7.3	Krümmung und Torsion	266
7.3.1	Definitionen	266
7.3.2	Geometrische Bedeutung von Riemann- und Torsionstensor	267
7.3.3	Der Ricci-Tensor und die skalare Krümmung	272
7.4	Levi-Civita-Zusammenhänge	272
7.4.1	Der Hauptsatz der Riemann'schen Geometrie	272
7.4.2	Der Levi-Civita-Zusammenhang in der klassischen Geometrie von Flächen	274

7.4.3	Geodäten	275
7.4.4	Das Normalkoordinatensystem	278
7.4.5	Riemann'scher Krümmungstensor mit Levi-Civita-Zusammenhang	279
7.5	Holonomie	283
7.6	Isometrien und konforme Transformationen	285
7.6.1	Isometrien	285
7.6.2	Konforme Transformationen	285
7.7	Killing-Vektorfelder	291
7.7.1	Killing-Vektorfelder	291
7.7.2	Konforme Killing-Vektorfelder	294
7.8	Nichtkoordinatenbasen	295
7.8.1	Definitionen	295
7.8.2	Cartan-Strukturgleichungen	296
7.8.3	Das lokale Bezugssystem	297
7.8.4	Der Levi-Civita-Zusammenhang in einer Nichtkoordinatenbasis	299
7.9	Differentialformen und die Hodge-Theorie	301
7.9.1	Invariante Volumenelemente	301
7.9.2	Dualitätstransformationen	302
7.9.3	Innere Produkte von r -Formen	304
7.9.4	Adjungierte von äußeren Ableitungen	305
7.9.5	Laplace-Operator, harmonische Formen und Hodge'scher Zerlegungssatz	306
7.9.6	Harmonische Formen und De-Rham-Kohomologiegruppen	308
7.10	Aspekte der Allgemeinen Relativitätstheorie	309
7.10.1	Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie	309
7.10.2	Einstein-Hilbert-Wirkung	310
7.10.3	Spinoren in gekrümmter Raumzeit	313
7.11	Bosonische Stringtheorie	315
7.11.1	Die Stringwirkung	315
7.11.2	Symmetrien der Polyakov-Strings	318
	Aufgaben	320
8	Komplexe Mannigfaltigkeiten	321
8.1	Komplexe Mannigfaltigkeiten	321
8.1.1	Definitionen	321
8.1.2	Beispiele	322
8.2	Analysis auf komplexen Mannigfaltigkeiten	329
8.2.1	Holomorphe Abbildungen	329
8.2.2	Komplexifizierungen	330
8.2.3	Fastkomplexe Struktur	331
8.3	Komplexe Differentialformen	334
8.3.1	Komplexifizierung von reellen Differentialformen	334
8.3.2	Differentialformen auf komplexen Mannigfaltigkeiten	335

8.3.3	Dolbeault-Operatoren	336
8.4	Hermite'sche Mannigfaltigkeiten, Hermite'sche Differentialgeometrie	338
8.4.1	Die Hermite'sche Metrik	338
8.4.2	Kähler-Formen	339
8.4.3	Kovariante Ableitungen	341
8.4.4	Torsion und Krümmung	342
8.5	Kähler-Mannigfaltigkeiten und Kähler-Differentialgeometrie	344
8.5.1	Definitionen	344
8.5.2	Kähler'sche Geometrie	348
8.5.3	Die Holonomiegruppe von Kähler-Mannigfaltigkeiten	349
8.6	Harmonische Formen und $\bar{\partial}$ -Kohomologiegruppen	350
8.6.1	Die adjungierte Operatoren ∂^\dagger und $\bar{\partial}^\dagger$	351
8.6.2	Laplace-Operatoren und der Satz von Hodge	352
8.6.3	Laplace-Operatoren auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit	353
8.6.4	Die Hodge-Zahlen von Kähler-Mannigfaltigkeiten	353
8.7	Fastkomplexe Mannigfaltigkeiten	356
8.7.1	Definitionen	356
8.8	Orbifolds	359
8.8.1	Eindimensionale Beispiele	359
8.8.2	Dreidimensionale Beispiele	359
9	Faserbündel	363
9.1	Tangentialbündel	363
9.2	Faserbündel	365
9.2.1	Definitionen	365
9.2.2	Rekonstruktion von Faserbündeln	369
9.2.3	Bündelabbildungen	369
9.2.4	Äquivalente Bündel	370
9.2.5	Rücktransportbündel	370
9.2.6	Das Homotopieaxiom	372
9.3	Vektorbündel	373
9.3.1	Definitionen und Beispiele	373
9.3.2	Rahmen	375
9.3.3	Kotangentialbündel und duale Bündel	376
9.3.4	Schnitte von Vektorbündeln	376
9.3.5	Produktbündel und Whitney-Summen-Bündel	377
9.3.6	Tensorproduktbündel	378
9.4	Prinzipalbündel	379
9.4.1	Definitionen	379
9.4.2	Assoziierte Bündel	386
9.4.3	Trivialität von Bündeln	388
*	Aufgaben	389

10 Zusammenhänge auf Faserbündeln	391
10.1 Zusammenhänge auf Prinzipalbündeln	391
10.1.1 Definitionen	392
10.1.2 Die Zusammenhangs-1-Form	393
10.1.3 Die lokale Zusammenhangsform und das Eichpotenzial	394
10.1.4 Horizontale Liftung und Paralleltransport	398
10.2 Holonomie	401
10.2.1 Definitionen	401
10.3 Krümmung	403
10.3.1 Kovariante Ableitungen in Prinzipalbündeln	403
10.3.2 Krümmung	403
10.3.3 Geometrische Bedeutung der Krümmung und das Ambrose-Singer-Theorem	405
10.3.4 Die lokale Form der Krümmung	406
10.3.5 Die Bianchi-Identität	408
10.4 Die kovariante Ableitung auf assoziierten Vektorbündeln	408
10.4.1 Die kovariante Ableitung auf assoziierten Bündeln	409
10.4.2 Ein lokaler Ausdruck für die kovariante Ableitung	410
10.4.3 Krümmung reloaded	414
10.4.4 Ein Zusammenhang, der das innere Produkt erhält	414
10.4.5 Holomorphe Vektorbündel und Hermite'sche innere Produkte	415
10.5 Eichtheorien	417
10.5.1 $U(1)$ -Eichtheorie	417
10.5.2 Der magnetische Dirac-Monopol	418
10.5.3 Der Aharonov-Bohm-Effekt	420
10.5.4 Die Yang-Mills-Theorie	422
10.5.5 Instantonen	423
10.6 Die Berry-Phase	428
10.6.1 Herleitung der Berry-Phase	428
10.6.2 Berry-Phase, Berry-Zusammenhang und Berry-Krümmung	429
Aufgabe	436
11 Charakteristische Klassen	437
11.1 Invariante Polynome und der Chern-Weil-Homomorphismus	437
11.1.1 Invariante Polynome	438
11.2 Chern-Klassen	444
11.2.1 Definitionen	444
11.2.2 Eigenschaften von Chern-Klassen	446
11.2.3 Das Splitting-Prinzip	447
11.2.4 Universelle Bündel und Klassifizierung von Räumen	448
11.3 Chern-Charaktere	449
11.3.1 Definitionen	449
11.3.2 Eigenschaften von Chern-Charakteren	452
11.3.3 Todd-Klassen	453

11.4	Pontrjagin- und Euler-Klassen	454
11.4.1	Pontrjagin-Klassen	454
11.4.2	Euler-Klassen	457
11.4.3	Hirzebruch'sches L -Polynom und \hat{A} -Geschlecht	460
11.5	Chern-Simons-Formen	461
11.5.1	Definition	461
11.5.2	Die Chern-Simons-Form des Chern-Charakters	462
11.5.3	Der Cartan'sche Homotopieoperator und Anwendungen	463
11.6	Stiefel-Whitney-Klassen	467
11.6.1	Spinbündel	467
11.6.2	Čech-Kohomologiegruppen	468
11.6.3	Stiefel-Whitney-Klassen	469
12	Indexsätze	473
12.1	Elliptische Operatoren und Fredholm-Operatoren	473
12.1.1	Elliptische Operatoren	474
12.1.2	Fredholm-Operatoren	476
12.1.3	Elliptische Komplexe	477
12.2	Der Atiyah-Singer-Indexsatz	479
12.2.1	Die Aussage des Satzes	479
12.3	Der De-Rham-Komplex	480
12.4	Der Dolbeault-Komplex	482
12.4.1	Der verdrillte Dolbeault-Komplex und der Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch	484
12.5	Der Signaturkomplex	484
12.5.1	Die Hirzebruch-Signatur	484
12.5.2	Der Signaturkomplex und der Signatursatz von Hirzebruch	485
12.6	Spinkomplexe	488
12.6.1	Der Dirac-Operator	488
12.6.2	Verdrillte Spinkomplexe	491
12.7	Der Wärmeleitungskern und verallgemeinerte ζ -Funktionen	493
12.7.1	Wärmeleitungskern und Indexsatz	493
12.7.2	Spektrale ζ -Funktionen	496
12.8	Der Atiyah-Patodi-Singer-Indexsatz	497
12.8.1	η -Invariante und spektraler Fluss	498
12.8.2	Der Atiyah-Patodi-Singer-(APS)-Indexsatz	498
12.9	Supersymmetrische Quantenmechanik	501
12.9.1	Clifford-Algebra und Fermionen	502
12.9.2	Supersymmetrische Quantenmechanik im flachen Raum	503
12.9.3	Supersymmetrische Quantenmechanik in allgemeinen Man- nigfaltigkeiten	506
12.10	Supersymmetrischer Beweis des Indexsatzes	508
12.10.1	Der Index	508
12.10.2	Pfadintegral und Indexsatz	511
	Aufgabe	521

13 Anomalien in Eichtheorien	523
13.1 Einführung	523
13.2 Abel'sche Anomalien	525
13.2.1 Die Fujikawa-Methode	525
13.3 Nicht-Abel'sche Anomalien	530
13.4 Die Wess-Zumino-Konsistenzbedingungen	533
13.4.1 Der Becchi-Rouet-Stora-Operator und der Faddeev-Popov-Geist	533
13.4.2 BRS-Operator, FP-Geist und Modulraum	535
13.4.3 Die Wess-Zumino-Bedingungen	537
13.4.4 Abstiegsleichungen und Lösungen von WZ-Bedingungen	537
13.5 Abel'sche contra nicht-Abel'sche Anomalien	540
13.5.1 m Dimensionen contra $m + 2$ Dimensionen	542
13.6 Die Paritätsanomalie in ungeraddimensionalen Räumen	545
13.6.1 Die Paritätsanomalie	546
13.6.2 Die Dimensionsleiter 4–3–2	547
14 Bosonische Stringtheorie	551
14.1 Differentialgeometrie auf Riemann'schen Flächen	551
14.1.1 Metrik und komplexe Struktur	552
14.1.2 Vektoren, Formen und Tensoren	553
14.1.3 Kovariante Ableitungen	554
14.1.4 Der Satz von Riemann-Roch	556
14.2 Quantentheorie von bosonischen Strings	558
14.2.1 Vakuumamplitude von Polyakov-Strings	558
14.2.2 Integrationsmaße	561
14.2.3 Komplexe Tensoranalysis und Stringmaß	572
14.2.4 Modulräume von Riemann'schen Flächen	576
14.3 Ein-Schleifen-Amplituden	578
14.3.1 Modulräume, CKV, Beltrami- und quadratische Differentiale	578
14.3.2 Bestimmung der Determinanten	580
Literatur	583
Sachregister	588