

Mikio Nakahara

# Differentialgeometrie, Topologie und Physik

Aus dem Englischen übersetzt von  
Dr. Matthias Delbrück

 Springer Spektrum

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort zur ersten Auflage</b>	<b>XV</b>
<b>Vorwort zur zweiten Auflage</b>	<b>XIX</b>
<b>Zur Nutzung dieses Buches</b>	<b>XXI</b>
<b>Notation und Konventionen</b>	<b>XXII</b>
<b>1 Quantenphysik</b>	<b>1</b>
1.1 Analytische Mechanik . . . . .	1
1.1.1 Newton'sche Mechanik . . . . .	1
1.1.2 Lagrange-Formalismus . . . . .	2
1.1.3 Hamilton-Formalismus . . . . .	6
1.2 Kanonische Quantisierung . . . . .	10
1.2.1 Hilbert-Raum, Bras und Kets . . . . .	10
1.2.2 Axiome der kanonischen Quantisierung . . . . .	11
1.2.3 Heisenberg-Gleichung, Heisenberg-Bild und Schrödinger-Bild . . . . .	14
1.2.4 Wellenfunktionen . . . . .	15
1.2.5 Harmonischer Oszillator . . . . .	18
1.3 Pfadintegral-Quantisierung für ein Boson . . . . .	20
1.3.1 Pfadintegral-Quantisierung . . . . .	20
1.3.2 Imaginäre Zeit und Zustandssumme . . . . .	28
1.3.3 Zeitgeordnetes Produkt und erzeugendes Funktional . . . . .	29
1.4 Harmonischer Oszillator . . . . .	32
1.4.1 Übergangsamplitude . . . . .	32
1.4.2 Zustandssumme . . . . .	36
1.5 Pfadintegral-Quantisierung eines Fermi-Teilchens . . . . .	40
1.5.1 Fermionischer harmonischer Oszillator . . . . .	40
1.5.2 Graßmann-Kalkül . . . . .	41
1.5.3 Differenziation . . . . .	43
1.5.4 Integration . . . . .	43
1.5.5 Delta-Funktion . . . . .	44
1.5.6 Gauß-Integral . . . . .	45
1.5.7 Variationsableitung . . . . .	46
1.5.8 Komplexe Konjugation . . . . .	47
1.5.9 Kohärente Zustände und Vollständigkeitsrelation . . . . .	47
1.5.10 Zustandssumme eines fermionischen Oszillators . . . . .	48

1.6	Quantisierung eines skalaren Felds	52
1.6.1	Freies skalares Feld	52
1.6.2	Wechselwirkendes skalares Feld	55
1.7	Quantisierung eines Dirac-Felds	56
1.8	Eichtheorien	57
1.8.1	Abel'sche Eichtheorien	57
1.8.2	Nicht-Abel'sche Eichtheorien	59
1.8.3	Higgs-Felder	61
1.9	Magnetische Monopole	62
1.9.1	Dirac-Monopole	62
1.9.2	Der Wu-Yang-Monopol	63
1.9.3	Ladungsquantisierung	64
1.10	Instantonen	65
1.10.1	Einführung	65
1.10.2	Die (anti-)selbstduale Lösung	66
	Aufgabe	67
<b>2</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>69</b>
2.1	Abbildungen	69
2.1.1	Definitionen	69
2.1.2	Äquivalenzrelation und Äquivalenzklasse	72
2.2	Vektorräume	78
2.2.1	Vektoren und ihre Räume	78
2.2.2	Lineare Abbildungen, Bilder und Kerne	79
2.2.3	Dualer Vektorraum	80
2.2.4	Inneres Produkt und Adjungierte	81
2.2.5	Tensoren	83
2.3	Topologische Räume	84
2.3.1	Definitionen	84
2.3.2	Stetige Abbildungen	85
2.3.3	Umgebungen und Hausdorff-Räume	86
2.3.4	Abgeschlossene Mengen	86
2.3.5	Kompaktheit	87
2.3.6	Zusammenhang	88
2.4	Homöomorphismen und topologische Invarianten	89
2.4.1	Homöomorphismen	89
2.4.2	Topologische Invarianten	90
2.4.3	Homotopietyp	92
2.4.4	Euler-Charakteristik: ein Beispiel	92
	Aufgaben	96

<b>3</b>	<b>Homologiegruppen</b>	<b>99</b>
3.1	Abel'sche Gruppen	100
3.1.1	Elementare Gruppentheorie	100
3.1.2	Endlich erzeugte Abel'sche Gruppen und freie Abel'sche Gruppen	102
3.1.3	Zyklische Gruppen	103
3.2	Simplexe und Simplizialkomplexe	104
3.2.1	Simplexe	105
3.2.2	Simplizialkomplexe und Polyeder	106
3.3	Homologiegruppen von Simplizialkomplexen	107
3.3.1	Orientierte Simplexe	107
3.3.2	Kettengruppe, Zyklengruppe und Rändergruppe	109
3.3.3	Homologiegruppen	113
3.3.4	Bestimmung von $H_0(K)$	116
3.3.5	Weitere Homologieberechnungen	117
3.4	Allgemeine Eigenschaften von Homologiegruppen	123
3.4.1	Zusammenhang und Homologiegruppen	123
3.4.2	Struktur von Homologiegruppen	124
3.4.3	Betti-Zahlen und der Euler-Poincaré-Satz	124
	Aufgaben	125
<b>4</b>	<b>Homotopiegruppen</b>	<b>127</b>
4.1	Fundamentalgruppen	127
4.1.1	Grundlagen	127
4.1.2	Pfade und Schleifen	128
4.1.3	Homotopie	129
4.1.4	Fundamentalgruppen	131
4.2	Allgemeine Eigenschaften von Fundamentalgruppen	133
4.2.1	Bogenweiser Zusammenhang und Fundamentalgruppen	133
4.2.2	Homotope Invarianz von Fundamentalgruppen	134
4.3	Beispiele für Fundamentalgruppen	138
4.3.1	Fundamentalgruppe des Torus	140
4.4	Fundamentalgruppen von Polyedern	141
4.4.1	Freie Gruppen und Relationen	141
4.4.2	Bestimmung der Fundamentalgruppen von Polyedern	143
4.4.3	Relationen zwischen $H_1(K)$ und $\pi_1( K )$	152
4.5	Höhere Homotopiegruppen	153
4.5.1	Definitionen	153
4.6	Allgemeine Eigenschaften von höheren Homotopiegruppen	155
4.6.1	Die Abel'sche Natur höherer Homotopiegruppen	155
4.6.2	Bogenweiser Zusammenhang und höhere Homotopie- gruppen	155

4.6.3	Homotopieinvarianz von höheren Homotopiegruppen . . . . .	156
4.6.4	Höhere Homotopiegruppen eines Produktraums . . . . .	156
4.6.5	Universelle Überlagerungsräume und höhere Homotopiegruppen . . . . .	156
4.7	Beispiele für höhere Homotopiegruppen . . . . .	158
4.8	Ordnung in kondensierter Materie . . . . .	161
4.8.1	Ordnungsparameter . . . . .	161
4.8.2	Suprafluides $^4\text{He}$ und Supraleiter . . . . .	163
4.8.3	Allgemeine Überlegungen . . . . .	165
4.9	Defekte in nematischen Flüssigkristallen . . . . .	167
4.9.1	Ordnungsparameter von nematischen Flüssigkristallen . . . . .	167
4.9.2	Liniendefekte in nematischen Flüssigkristallen . . . . .	168
4.9.3	Punktdefekte in nematischen Flüssigkristallen . . . . .	169
4.9.4	Höherdimensionale Textur . . . . .	170
4.10	Texturen in suprafluidem $^3\text{He-A}$ . . . . .	172
4.10.1	Suprafluides $^3\text{He-A}$ . . . . .	172
4.10.2	Liniendefekte und nichtsinguläre Wirbel in $^3\text{He-A}$ . . . . .	174
4.10.3	Shankar-Monopole in $^3\text{He-A}$ . . . . .	174
	Aufgaben . . . . .	176
<b>5</b>	<b>Mannigfaltigkeiten</b> . . . . .	<b>177</b>
5.1	Mannigfaltigkeiten . . . . .	177
5.1.1	Heuristische Einführung . . . . .	177
5.1.2	Definitionen . . . . .	180
5.1.3	Beispiele . . . . .	182
5.2	Analysis auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	187
5.2.1	Differenzierbare Abbildungen . . . . .	187
5.2.2	Vektoren . . . . .	190
5.2.3	1-Formen . . . . .	193
5.2.4	Tensoren . . . . .	194
5.2.5	Tensorfelder . . . . .	194
5.2.6	Induzierte Abbildungen . . . . .	195
5.2.7	Untermannigfaltigkeiten . . . . .	197
5.3	Flüsse und Lie-Ableitungen . . . . .	198
5.3.1	Einparametrische Transformationsgruppe . . . . .	199
5.3.2	Lie-Ableitungen . . . . .	201
5.4	Differentialformen . . . . .	205
5.4.1	Definitionen . . . . .	206
5.4.2	Äußere Ableitungen . . . . .	208
5.4.3	Inneres Produkt und Lie-Ableitung von Formen . . . . .	211
5.5	Integration von Differentialformen . . . . .	214
5.5.1	Orientierung . . . . .	214
5.5.2	Integration von Formen . . . . .	215
5.6	Lie-Gruppen und Lie-Algebren . . . . .	217
5.6.1	Lie-Gruppen . . . . .	217

5.6.2	Lie-Algebren	219
5.6.3	Die einparametrische Untergruppe	223
5.6.4	Maurer-Cartan-Gleichung	225
5.7	Die Wirkung von Lie-Gruppen auf Mannigfaltigkeiten	227
5.7.1	Definitionen	227
5.7.2	Orbits und Isotropiegruppen	230
5.7.3	Induzierte Vektorfelder	234
5.7.4	Die adjungierte Darstellung	235
	Aufgaben	235
<b>6</b>	<b>De-Rham-Kohomologiegruppen</b>	<b>237</b>
6.1	Der Stokes'sche Satz	237
6.1.1	Vorüberlegung	237
6.1.2	Der Stokes'sche Satz	239
6.2	De-Rham-Kohomologiegruppen	241
6.2.1	Definitionen	241
6.2.2	Dualität von $H_r(M)$ und $H^r(M)$ und der Satz von de Rham	244
6.3	Das Poincaré-Lemma	247
6.4	Struktur von De-Rham-Kohomologiegruppen	249
6.4.1	Poincaré-Dualität	249
6.4.2	Kohomologieringe	249
6.4.3	Die Künneth-Formel	250
6.4.4	Rücktransport von De-Rham-Kohomologiegruppen	252
6.4.5	Homotopie und $H^1(M)$	252
<b>7</b>	<b>Riemann'sche Geometrie</b>	<b>255</b>
7.1	Riemann'sche und pseudo-Riemann'sche Mannigfaltigkeiten	255
7.1.1	Metrische Tensoren	255
7.1.2	Induzierte Metrik	257
7.2	Paralleltransport, Zusammenhang und kovariante Ableitung	258
7.2.1	Heuristische Einführung	258
7.2.2	Affine Zusammenhänge	261
7.2.3	Paralleltransport und Geodäten	262
7.2.4	Die kovariante Ableitung von Tensorfeldern	263
7.2.5	Transformationseigenschaften von Zusammenhangskoeffizienten	264
7.2.6	Der metrische Zusammenhang	264
7.3	Krümmung und Torsion	266
7.3.1	Definitionen	266
7.3.2	Geometrische Bedeutung von Riemann- und Torsionstensor	267
7.3.3	Der Ricci-Tensor und die skalare Krümmung	272
7.4	Levi-Civita-Zusammenhänge	272
7.4.1	Der Hauptsatz der Riemann'schen Geometrie	272
7.4.2	Der Levi-Civita-Zusammenhang in der klassischen Geometrie von Flächen	274

7.4.3	Geodäten . . . . .	275
7.4.4	Das Normalkoordinatensystem . . . . .	278
7.4.5	Riemann'scher Krümmungstensor mit Levi-Civita-Zusammenhang . . . . .	279
7.5	Holonomie . . . . .	283
7.6	Isometrien und konforme Transformationen . . . . .	285
7.6.1	Isometrien . . . . .	285
7.6.2	Konforme Transformationen . . . . .	285
7.7	Killing-Vektorfelder . . . . .	291
7.7.1	Killing-Vektorfelder . . . . .	291
7.7.2	Konforme Killing-Vektorfelder . . . . .	294
7.8	Nichtkoordinatenbasen . . . . .	295
7.8.1	Definitionen . . . . .	295
7.8.2	Cartan-Strukturgleichungen . . . . .	296
7.8.3	Das lokale Bezugssystem . . . . .	297
7.8.4	Der Levi-Civita-Zusammenhang in einer Nichtkoordinatenbasis . . . . .	299
7.9	Differentialformen und die Hodge-Theorie . . . . .	301
7.9.1	Invariante Volumenelemente . . . . .	301
7.9.2	Dualitätstransformationen . . . . .	302
7.9.3	Innere Produkte von $r$ -Formen . . . . .	304
7.9.4	Adjungierte von äußeren Ableitungen . . . . .	305
7.9.5	Laplace-Operator, harmonische Formen und Hodge'scher Zerlegungssatz . . . . .	306
7.9.6	Harmonische Formen und De-Rham-Kohomologiegruppen . . . . .	308
7.10	Aspekte der Allgemeinen Relativitätstheorie . . . . .	309
7.10.1	Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie . . . . .	309
7.10.2	Einstein-Hilbert-Wirkung . . . . .	310
7.10.3	Spinoren in gekrümmter Raumzeit . . . . .	313
7.11	Bosonische Stringtheorie . . . . .	315
7.11.1	Die Stringwirkung . . . . .	315
7.11.2	Symmetrien der Polyakov-Strings . . . . .	318
	Aufgaben . . . . .	320
<b>8</b>	<b>Komplexe Mannigfaltigkeiten</b> . . . . .	<b>321</b>
8.1	Komplexe Mannigfaltigkeiten . . . . .	321
8.1.1	Definitionen . . . . .	321
8.1.2	Beispiele . . . . .	322
8.2	Analysis auf komplexen Mannigfaltigkeiten . . . . .	329
8.2.1	Holomorphe Abbildungen . . . . .	329
8.2.2	Komplexifizierungen . . . . .	330
8.2.3	Fastkomplexe Struktur . . . . .	331
8.3	Komplexe Differentialformen . . . . .	334
8.3.1	Komplexifizierung von reellen Differentialformen . . . . .	334
8.3.2	Differentialformen auf komplexen Mannigfaltigkeiten . . . . .	335

8.3.3	Dolbeault-Operatoren	336
8.4	Hermite'sche Mannigfaltigkeiten, Hermite'sche Differentialgeometrie	338
8.4.1	Die Hermite'sche Metrik	338
8.4.2	Kähler-Formen	339
8.4.3	Kovariante Ableitungen	341
8.4.4	Torsion und Krümmung	342
8.5	Kähler-Mannigfaltigkeiten und Kähler-Differentialgeometrie	344
8.5.1	Definitionen	344
8.5.2	Kähler'sche Geometrie	348
8.5.3	Die Holonomiegruppe von Kähler-Mannigfaltigkeiten	349
8.6	Harmonische Formen und $\bar{\partial}$ -Kohomologiegruppen	350
8.6.1	Die adjungierten Operatoren $\partial^\dagger$ und $\bar{\partial}^\dagger$	351
8.6.2	Laplace-Operatoren und der Satz von Hodge	352
8.6.3	Laplace-Operatoren auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit	353
8.6.4	Die Hodge-Zahlen von Kähler-Mannigfaltigkeiten	353
8.7	Fastkomplexe Mannigfaltigkeiten	356
8.7.1	Definitionen	356
8.8	Orbifolds	359
8.8.1	Eindimensionale Beispiele	359
8.8.2	Dreidimensionale Beispiele	359
<b>9</b>	<b>Faserbündel</b>	<b>363</b>
9.1	Tangentialbündel	363
9.2	Faserbündel	365
9.2.1	Definitionen	365
9.2.2	Rekonstruktion von Faserbündeln	369
9.2.3	Bündelabbildungen	369
9.2.4	Äquivalente Bündel	370
9.2.5	Rücktransportbündel	370
9.2.6	Das Homotopieaxiom	372
9.3	Vektorbündel	373
9.3.1	Definitionen und Beispiele	373
9.3.2	Rahmen	375
9.3.3	Kotangentialbündel und duale Bündel	376
9.3.4	Schnitte von Vektorbündeln	376
9.3.5	Produktbündel und Whitney-Summen-Bündel	377
9.3.6	Tensorproduktbündel	378
9.4	Prinzipalbündel	379
9.4.1	Definitionen	379
9.4.2	Assoziierte Bündel	386
9.4.3	Trivialität von Bündeln	388
*	Aufgaben	389

<b>10 Zusammenhänge auf Faserbündeln</b>	<b>391</b>
10.1 Zusammenhänge auf Prinzipalbündeln	391
10.1.1 Definitionen	392
10.1.2 Die Zusammenhangs-1-Form	393
10.1.3 Die lokale Zusammenhangsform und das Eichpotenzial	394
10.1.4 Horizontale Liftung und Paralleltransport	398
10.2 Holonomie	401
10.2.1 Definitionen	401
10.3 Krümmung	403
10.3.1 Kovariante Ableitungen in Prinzipalbündeln	403
10.3.2 Krümmung	403
10.3.3 Geometrische Bedeutung der Krümmung und das Ambrose-Singer-Theorem	405
10.3.4 Die lokale Form der Krümmung	406
10.3.5 Die Bianchi-Identität	408
10.4 Die kovariante Ableitung auf assoziierten Vektorbündeln	408
10.4.1 Die kovariante Ableitung auf assoziierten Bündeln	409
10.4.2 Ein lokaler Ausdruck für die kovariante Ableitung	410
10.4.3 Krümmung reloaded	414
10.4.4 Ein Zusammenhang, der das innere Produkt erhält	414
10.4.5 Holomorphe Vektorbündel und Hermite'sche innere Produkte	415
10.5 Eichtheorien	417
10.5.1 U(1)-Eichtheorie	417
10.5.2 Der magnetische Dirac-Monopol	418
10.5.3 Der Aharonov-Bohm-Effekt	420
10.5.4 Die Yang-Mills-Theorie	422
10.5.5 Instantonen	423
10.6 Die Berry-Phase	428
10.6.1 Herleitung der Berry-Phase	428
10.6.2 Berry-Phase, Berry-Zusammenhang und Berry-Krümmung	429
Aufgabe	436
<b>11 Charakteristische Klassen</b>	<b>437</b>
11.1 Invariante Polynome und der Chern-Weil-Homomorphismus	437
11.1.1 Invariante Polynome	438
11.2 Chern-Klassen	444
11.2.1 Definitionen	444
11.2.2 Eigenschaften von Chern-Klassen	446
11.2.3 Das Splitting-Prinzip	447
11.2.4 Universelle Bündel und Klassifizierung von Räumen	448
11.3 Chern-Charaktere	449
11.3.1 Definitionen	449
11.3.2 Eigenschaften von Chern-Charakteren	452
11.3.3 Todd-Klassen	453

11.4	Pontrjagin- und Euler-Klassen . . . . .	454
11.4.1	Pontrjagin-Klassen . . . . .	454
11.4.2	Euler-Klassen . . . . .	457
11.4.3	Hirzebruch'sches $L$ -Polynom und $\hat{A}$ -Geschlecht . . . . .	460
11.5	Chern-Simons-Formen . . . . .	461
11.5.1	Definition . . . . .	461
11.5.2	Die Chern-Simons-Form des Chern-Charakters . . . . .	462
11.5.3	Der Cartan'sche Homotopieoperator und Anwendungen . . . . .	463
11.6	Stiefel-Whitney-Klassen . . . . .	467
11.6.1	Spinbündel . . . . .	467
11.6.2	Čech-Kohomologiegruppen . . . . .	468
11.6.3	Stiefel-Whitney-Klassen . . . . .	469
<b>12</b>	<b>Indexsätze</b> . . . . .	<b>473</b>
12.1	Elliptische Operatoren und Fredholm-Operatoren . . . . .	473
12.1.1	Elliptische Operatoren . . . . .	474
12.1.2	Fredholm-Operatoren . . . . .	476
12.1.3	Elliptische Komplexe . . . . .	477
12.2	Der Atiyah-Singer-Indexsatz . . . . .	479
12.2.1	Die Aussage des Satzes . . . . .	479
12.3	Der De-Rham-Komplex . . . . .	480
12.4	Der Dolbeault-Komplex . . . . .	482
12.4.1	Der verdrillte Dolbeault-Komplex und der Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch . . . . .	484
12.5	Der Signaturkomplex . . . . .	484
12.5.1	Die Hirzebruch-Signatur . . . . .	484
12.5.2	Der Signaturkomplex und der Signatursatz von Hirzebruch . . . . .	485
12.6	Spinkomplexe . . . . .	488
12.6.1	Der Dirac-Operator . . . . .	488
12.6.2	Verdrillte Spinkomplexe . . . . .	491
12.7	Der Wärmeleitungskern und verallgemeinerte $\zeta$ -Funktionen . . . . .	493
12.7.1	Wärmeleitungskern und Indexsatz . . . . .	493
12.7.2	Spektrale $\zeta$ -Funktionen . . . . .	496
12.8	Der Atiyah-Patodi-Singer-Indexsatz . . . . .	497
12.8.1	$\eta$ -Invariante und spektraler Fluss . . . . .	498
12.8.2	Der Atiyah-Patodi-Singer-(APS)-Indexsatz . . . . .	498
12.9	Supersymmetrische Quantenmechanik . . . . .	501
12.9.1	Clifford-Algebra und Fermionen . . . . .	502
12.9.2	Supersymmetrische Quantenmechanik im flachen Raum . . . . .	503
12.9.3	Supersymmetrische Quantenmechanik in allgemeinen Man- nigfaltigkeiten . . . . .	506
12.10	Supersymmetrischer Beweis des Indexsatzes . . . . .	508
12.10.1	Der Index . . . . .	508
12.10.2	Pfadintegral und Indexsatz . . . . .	511
	Aufgabe . . . . .	521

<b>13 Anomalien in Eichtheorien</b>	<b>523</b>
13.1 Einführung	523
13.2 Abel'sche Anomalien	525
13.2.1 Die Fujikawa-Methode	525
13.3 Nicht-Abel'sche Anomalien	530
13.4 Die Wess-Zumino-Konsistenzbedingungen	533
13.4.1 Der Becchi-Rouet-Stora-Operator und der Faddeev-Popov-Geist	533
13.4.2 BRS-Operator, FP-Geist und Modulraum	535
13.4.3 Die Wess-Zumino-Bedingungen	537
13.4.4 Abstiegsleichungen und Lösungen von WZ-Bedingungen	537
13.5 Abel'sche contra nicht-Abel'sche Anomalien	540
13.5.1 $m$ Dimensionen contra $m + 2$ Dimensionen	542
13.6 Die Paritätsanomalie in ungeraddimensionalen Räumen	545
13.6.1 Die Paritätsanomalie	546
13.6.2 Die Dimensionsleiter 4–3–2	547
<b>14 Bosonische Stringtheorie</b>	<b>551</b>
14.1 Differentialgeometrie auf Riemann'schen Flächen	551
14.1.1 Metrik und komplexe Struktur	552
14.1.2 Vektoren, Formen und Tensoren	553
14.1.3 Kovariante Ableitungen	554
14.1.4 Der Satz von Riemann-Roch	556
14.2 Quantentheorie von bosonischen Strings	558
14.2.1 Vakuumamplitude von Polyakov-Strings	558
14.2.2 Integrationsmaße	561
14.2.3 Komplexe Tensoranalysis und Stringmaß	572
14.2.4 Modulräume von Riemann'schen Flächen	576
14.3 Ein-Schleifen-Amplituden	578
14.3.1 Modulräume, CKV, Beltrami- und quadratische Differentiale	578
14.3.2 Bestimmung der Determinanten	580
<b>Literatur</b>	<b>583</b>
<b>Sachregister</b>	<b>588</b>