
Wolfgang Hackbusch

Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen

4., überarbeitete Auflage

 Springer Spektrum

Inhaltsverzeichnis

1	Partielle Differentialgleichungen und ihre Typeneinteilung	1
1.1	Beispiele	1
1.2	Typeneinteilungen bei Gleichungen zweiter Ordnung	5
1.3	Typeneinteilungen bei Systemen erster Ordnung	7
1.4	Unterschiedliche Eigenschaften der verschiedenen Typen	8
1.5	Literatur	11
2	Die Potentialgleichung	13
2.1	Problemstellung	13
2.2	Singularitätenfunktion	15
2.3	Mittelwerteigenschaft und Maximumprinzip	18
2.4	Stetige Abhängigkeit von den Randdaten	23
3	Die Poisson-Gleichung	27
3.1	Problemstellung	27
3.2	Green'sche Funktion und Lösungsdarstellung	28
3.3	Existenz einer Lösung	30
3.4	Die Green'sche Funktion für die Kugel	35
3.5	Die Neumann-Randwertaufgabe	36
3.6	Die Integralgleichungsmethode	37
4	Differenzenmethode für die Poisson-Gleichung	39
4.1	Einführung: Der eindimensionale Fall	40
4.2	Fünfpunktformel	42
4.3	M-Matrizen, Matrixnormen und positiv definite Matrizen	46
4.4	Eigenschaften der Matrix L_h	53
4.5	Konvergenz	60
4.6	Differenzenverfahren höherer Ordnung	63
4.7	Die Diskretisierung der Neumann-Randwertaufgabe	66
4.7.1	Einseitige Differenz für $\partial u / \partial n$	66
4.7.2	Symmetrische Differenz für $\partial u / \partial n$	70
4.7.3	Symmetrische Differenz für $\partial u / \partial n$ im verschobenen Gitter	71
4.7.4	Beweis des Stabilitätsatzes 4.62	72
4.8	Diskretisierung der Poisson-Gleichung im beliebigen Gebiet	78

4.8.1	Shortley–Weller-Approximation	78
4.8.2	Interpolation in randnahen Punkten	81
5	Allgemeine Randwertaufgaben	83
5.1	Dirichlet-Randwertaufgaben für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	83
5.1.1	Problemstellung	83
5.1.2	Maximumprinzip	85
5.1.3	Eindeutigkeit der Lösung und stetige Abhängigkeit	88
5.1.4	Differenzenverfahren für die allgemeine Differentialgleichung zweiter Ordnung	90
5.1.5	Green'sche Funktion	94
5.2	Allgemeine Randbedingungen	95
5.2.1	Formulierung der Randwertaufgabe	95
5.2.2	Differenzenverfahren bei allgemeinen Randbedingungen	97
5.3	Randwertaufgaben höherer Ordnung	101
5.3.1	Die biharmonische Differentialgleichung	101
5.3.2	Allgemeine lineare Differentialgleichung der Ordnung $2m$	101
5.3.3	Diskretisierung der biharmonischen Differentialgleichung	103
6	Exkurs über Funktionalanalysis	107
6.1	Banach-Räume und Hilbert-Räume	107
6.1.1	Normierte Räume	107
6.1.2	Operatoren	108
6.1.3	Banach-Räume	109
6.1.4	Hilbert-Räume	110
6.2	Sobolev-Räume	112
6.2.1	Der Raum $L^2(\Omega)$	112
6.2.2	Die Räume $H^k(\Omega)$ und $H_0^k(\Omega)$	114
6.2.3	Fourier-Transformation und $H^k(\mathbb{R}^n)$	116
6.2.4	$H^s(\Omega)$ für reelles $s \geq 0$	119
6.2.5	Spur- und Fortsetzungssätze	120
6.3	Dualräume	127
6.3.1	Dualraum eines normierten Raumes	127
6.3.2	Adjungierte Operatoren	128
6.3.3	Skalen von Hilbert-Räumen	129
6.4	Kompakte Operatoren	131
6.5	Bilinearformen	134
7	Variationsformulierung	141
7.1	Historische Bemerkungen zum Dirichlet-Prinzip	141
7.2	Gleichungen mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen	143
7.2.1	Dirichlet-Randbedingung	143
7.2.2	Schwache Formulierung	144
7.2.3	$H_0^m(\Omega)$ -Elliptizität	145
7.2.4	$H_0^m(\Omega)$ -Koerzivität	148
7.3	Inhomogene Dirichlet-Randbedingung	149
7.4	Natürliche Randbedingungen	151

7.4.1	Variation in $H^m(\Omega)$	151
7.4.2	Konormale Randbedingung	152
7.4.3	Schiefe Randbedingungen	153
7.4.4	Randbedingungen bei $m \geq 2$	156
7.4.5	Weitere Randbedingungen	157
7.5	Pseudodifferentialgleichungen	159
8	Die Methode der finiten Elemente	161
8.1	Historische Bemerkungen	161
8.2	Das Ritz–Galerkin-Verfahren	163
8.2.1	Grundlagen	163
8.2.2	Analyse der diskreten Gleichung	165
8.2.3	Lösbarkeit des diskreten Problems	168
8.2.4	Beispiele	170
8.3	Fehlerabschätzungen	172
8.3.1	Quasioptimalität	172
8.3.2	Konvergenz der Ritz–Galerkin-Lösungen	173
8.3.3	Ritz-Projektion	175
8.3.4	Weitere Stabilitäts- und Fehlerabschätzungen	176
8.4	Finite Elemente	177
8.4.1	Einführung: Lineare Elemente für $\Omega = (a, b)$	177
8.4.2	Lineare Elemente für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$	180
8.4.3	Bilineare Elemente für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$	183
8.4.4	Quadratische Elemente für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$	184
8.4.5	Elemente für $\Omega \subset \mathbb{R}^3$	186
8.4.6	Behandlung von Nebenbedingungen	186
8.5	Fehlerabschätzungen bei Finite-Element-Verfahren	189
8.5.1	Vorbereitungen	189
8.5.2	Eigenschaften von Folgen von Finite-Element-Räumen	192
8.5.3	H^1 -Abschätzungen für lineare Elemente	193
8.5.4	L^2 -Abschätzungen für lineare Elemente	195
8.6	Verallgemeinerungen	198
8.6.1	Fehlerabschätzungen für andere Elemente	198
8.6.2	Finite Elemente für Gleichungen höherer Ordnung	198
8.6.3	Finite Elemente für Nichtpolygon-Gebiete	201
8.7	A-posteriori-Fehlerabschätzungen, Adaptivität	203
8.7.1	A-posteriori-Fehlerabschätzungen	203
8.7.2	Effizienz der Finite-Element-Methode	208
8.7.3	Adaptive Finite-Element-Methode	209
8.8	Eigenschaften der Systemmatrix	212
8.8.1	Zusammenhang von $\mathbf{L}$ und L_h	212
8.8.2	Normäquivalenzen und Massematrix	212
8.8.3	Inverse Abschätzung und Kondition von $\mathbf{L}$	214
8.8.4	Elementmatrizen	216
8.8.5	Positivität, Maximumprinzip	217
8.9	Weitere Hinweise	218
8.9.1	Gemischte bzw. hybride finite Elemente	218
8.9.2	Nichtkonforme Elemente	219

8.9.3	Nichtzulässige Triangulationen	220
8.9.4	Trefftz-Verfahren	222
8.9.5	Finite-Element-Verfahren für singuläre Lösungen	222
8.9.6	Hierarchische Basen	223
8.9.7	Superkonvergenz	223
8.9.8	Die Mörtelmethode ("mortar finite elements")	224
8.9.9	Verwandte Diskretisierungen	226
9	Regularität	229
9.1	Lösungen der Randwertaufgabe in $H^s(\Omega)$, $s > m$	229
9.1.1	Das Regularitätsproblem	229
9.1.2	Regularitätssätze für $\Omega = \mathbb{R}^n$	232
9.1.3	Regularitätssätze für $\Omega = \mathbb{R}_+^n$	239
9.1.4	Regularitätssätze für allgemeines $\Omega \subset \mathbb{R}^n$	243
9.1.5	Regularität bei konvexem Gebiet und Gebieten mit Ecken	246
9.2	Innere Regularität	249
9.2.1	Regularitätsabschätzung	250
9.2.2	Verhalten der Singularitätenfunktion und der Green'schen Funktion	250
9.3	Regularitätseigenschaften der Differenzengleichungen	253
9.3.1	Diskrete H^1 -Regularität	254
9.3.2	Konsistenz	259
9.3.3	Optimale Fehlerabschätzungen	266
9.3.4	$H_{0,h}^{m+\theta}$ -Regularität für $-1/2 < \theta < 1/2$	267
9.3.5	H_h^2 -Regularität	268
9.3.6	Innere Regularität	271
10	Spezielle Differentialgleichungen	273
10.1	Differentialgleichungen mit unstetigen Koeffizienten	273
10.1.1	Formulierung	273
10.1.2	Finite-Element-Diskretisierung	276
10.1.3	Diskretisierung mittels Differenzenverfahren	276
10.1.4	Unstetige Koeffizienten der ersten oder nullten Ableitungen	277
10.2	Ein singular gestörtes Problem	277
10.2.1	Die Konvektionsdiffusionsgleichung	277
10.2.2	Stabile Differenzenschemata	279
10.2.3	Finite Elemente	281
11	Eigenwertprobleme elliptischer Operatoren	289
11.1	Formulierung der Eigenwertprobleme	289
11.2	Finite-Element-Diskretisierung	291
11.2.1	Diskretisierung	291
11.2.2	Qualitative Konvergenzresultate	292
11.2.3	Quantitative Konvergenzresultate	296
11.2.4	Konsistente Probleme	300
11.3	Diskretisierung durch Differenzenverfahren	303
11.4	Weitere Anmerkungen	310

12	Stokes-Gleichungen	311
12.1	Elliptische Differentialgleichungssysteme	311
12.2	Variationsformulierung	314
12.2.1	Schwache Formulierung der Stokes-Gleichungen	314
12.2.2	Sattelpunktprobleme	315
12.2.3	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Sattelpunktproblems	318
12.2.4	Lösbarkeit und Regularität des Stokes-Problems	321
12.2.5	Eine V_0 -elliptische Variationsformulierung der Stokes-Gleichung	324
12.3	Finite-Element-Methode für das Stokes-Problem	325
12.3.1	Finite-Element-Diskretisierung des Sattelpunktproblems	325
12.3.2	Stabilitätsbedingungen	327
12.3.3	Stabile Finite-Element-Räume für das Stokes-Problem	328
12.3.4	Divergenzfreie Ansätze	333
A	Lösungen der Übungsaufgaben	335
	Lösungen zu Kapitel 1	335
	Lösungen zu Kapitel 2	340
	Lösungen zu Kapitel 3	344
	Lösungen zu Kapitel 4	347
	Lösungen zu Kapitel 5	353
	Lösungen zu Kapitel 6	355
	Lösungen zu Kapitel 7	360
	Lösungen zu Kapitel 8	361
	Lösungen zu Kapitel 9	364
	Lösungen zu Kapitel 10	368
	Lösungen zu Kapitel 11	369
	Lösungen zu Kapitel 12	374
	Literaturverzeichnis	377
	Sachverzeichnis	393