Hans Rudolf Schwarz | Norbert Köckler

Numerische Mathematik

8., aktualisierte Auflage

STUDIUM

VIEWEG+
TEUBNER

Inhalt

Einleitung **13**

1 Fehlertheorie **15**

1.1 Fehlerarten . . . 15

1.2 Zahldarstellung . . . 16

1.3 Rundungsfehler . . . 18

1.4 Differenzielle Fehleranalyse . . . 21

1.5 Ergänzungen und Beispiele . . . 24

1.6 Software . . . 27

1.7 Aufgaben . . . 28

2 Lineare Gleichungssysteme, direkte Methoden **30**

2.1 Der Gauß-Algorithmus . . . 30
2.1.1 Elimination, Dreieckszerlegung und Determinantenberechnung . . . 30
2.1.2 Pivotstrategien . . . 38
2.1.3 Ergänzungen . . . 43

2.2 Genauigkeitsfragen, Fehlerabschätzungen . . . 47
2.2.1 Normen . . . 47
2.2.2 Fehlerabschätzungen, Kondition . . . 52

2.3 Systeme mit speziellen Eigenschaften . . . 56
2.3.1 Symmetrische, positiv definite Systeme . . . 56
2.3.2 Bandgleichungen . . . 62
2.3.3 Tridiagonale Gleichungssysteme . . . 64

2.4 Verfahren für Vektorrechner und Parallelrechner . . . 67
2.4.1 Voll besetzte Systeme . . . 68
2.4.2 Tridiagonale Gleichungssysteme . . . 73

2.5 Anwendungen . . . 82

2.6 Software . . . 87

2.7 Aufgaben . . . 88

3 Interpolation und Approximation 91

3.1 Polynominterpolation . . . 92
3.1.1 Problemstellung . . . 92
3.1.2 Lagrange-Interpolation . . . 95
3.1.3 Newton-Interpolation . . . 95
3.1.4 Hermite-Interpolation . . . 98
3.1.5 Inverse Interpolation . . . 100
3.1.6 Anwendung: Numerische Differenziation . . . 101

3.2 Splines . . . 106
3.2.1 Kubische Splines . . . 107
3.2.2 B-Splines 1. Grades . . . 112
3.2.3 Kubische B-Splines . . . 114

3.3 Zweidimensionale Splineverfahren . . . 119
3.3.1 Bilineare Tensorsplines . . . 120
3.3.2 Bikubische Tensorsplines . . . 123

3.4 Kurveninterpolation . . . 125

3.5 Kurven und Flächen mit Bézier-Polynomen . . . 127
3.5.1 Bernstein-Polynome . . . 127
3.5.2 Bézier-Darstellung eines Polynoms . . . 129
3.5.3 Der Casteljau-Algorithmus . . . 130
3.5.4 Bézier-Kurven . . . 131
3.5.5 Bézier-Flächen . . . 137

3.6 Gauß-Approximation . . . 140
3.6.1 Diskrete Gauß-Approximation . . . 142
3.6.2 Kontinuierliche Gauß-Approximation . . . 144

3.7 Trigonometrische Approximation . . . 145
3.7.1 Fourier-Reihen . . . 145
3.7.2 Effiziente Berechnung der Fourier-Koeffizienten . . . 154

3.8 Orthogonale Polynome . . . 161
3.8.1 Approximation mit Tschebyscheff-Polynomen . . . 162
3.8.2 Interpolation mit Tschebyscheff-Polynomen . . . 170
3.8.3 Die Legendre-Polynome . . . 174

3.9 Software . . . 179

3.10 Aufgaben . . . 179

4 Nichtlineare Gleichungen 183

4.1 Theoretische Grundlagen . . . 183
4.1.1 Problemstellung . . . 183
4.1.2 Konvergenztheorie und Banachscher Fixpunktsatz . . . 185
4.1.3 Stabilität und Kondition . . . 189

4.2 Gleichungen in einer Unbekannten . . . 190
4.2.1 Das Verfahren der Bisektion . . . 190
4.2.2 Das Verfahren von Newton . . . 192
4.2.3 Die Sekantenmethode . . . 195
4.2.4 Brents Black-box-Methode . . . 196

4.3 Gleichungen in mehreren Unbekannten . . . 199
4.3.1 Fixpunktiteration und Konvergenz . . . 199
4.3.2 Das Verfahren von Newton . . . 200

4.4 Nullstellen von Polynomen . . . 207
4.4.1 Reelle Nullstellen: Das Verfahren von Newton-Maehly . . . 207
4.4.2 Komplexe Nullstellen: Das Verfahren von Bairstow . . . 211

4.5 Software . . . 215

4.6 Aufgaben . . . 215

5 Eigenwertprobleme 218

5.1 Theoretische Grundlagen . . . 219
5.1.1 Das charakteristische Polynom . . . 219
5.1.2 Ähnlichkeitstransformationen . . . 219
5.1.3 Symmetrische Eigenwertprobleme . . . 220
5.1.4 Elementare Rotationsmatrizen . . . 220

5.2 Das klassische Jacobi-Verfahren . . . 222

5.3 Die Vektoriteration . . . 229
5.3.1 Die einfache Vektoriteration nach von Mises . . . 229
5.3.2 Die inverse Vektoriteration . . . 231

5.4 Transformationsmethoden . . . 232
5.4.1 Transformation auf Hessenberg-Form . . . 233
5.4.2 Transformation auf tridiagonale Form . . . 237
5.4.3 Schnelle Givens-Transformation . . . 239

5.5 QR-Algorithmus . . . 243
5.5.1 Grundlagen zur QR-Transformation . . . 243
5.5.2 Praktische Durchführung, reelle Eigenwerte . . . 248
5.5.3 QR-Doppelschritt, komplexe Eigenwerte . . . 253
5.5.4 QR-Algorithmus für tridiagonale Matrizen . . . 256
5.5.5 Zur Berechnung der Eigenvektoren . . . 260

5.6 Das allgemeine Eigenwertproblem . . . 261
5.6.1 Der symmetrisch positiv definite Fall . . . 261

5.7 Eigenwertschranken, Kondition, Stabilität . . . 264

5.8 Anwendung: Membranschwingungen . . . 268

5.9 Software . . . 270

5.10 Aufgaben . . . 271

6 Ausgleichsprobleme, Methode der kleinsten Quadrate 274

6.1 Lineare Ausgleichsprobleme, Normalgleichungen 274

6.2 Methoden der Orthogonaltransformation 278
6.2.1 Givens-Transformation 279
6.2.2 Spezielle Rechentechniken 284
6.2.3 Householder-Transformation 286

6.3 Singulärwertzerlegung 292

6.4 Nichtlineare Ausgleichsprobleme 296
6.4.1 Gauß-Newton-Methode 297
6.4.2 Minimierungsverfahren 300

6.5 Software 304

6.6 Aufgaben 305

7 Numerische Integration 307

7.1 Newton-Cotes-Formeln 308
7.1.1 Konstruktion von Newton-Cotes-Formeln 308
7.1.2 Verfeinerung der Trapezregel 310

7.2 Romberg-Integration 313

7.3 Transformationsmethoden 315
7.3.1 Periodische Integranden 316
7.3.2 Integrale über $\mathbb{R}$ 318
7.3.3 Variablensubstitution 320

7.4 Gauß-Integration 323
7.4.1 Eingebettete Gauß-Regeln 331

7.5 Adaptive Integration 332

7.6 Mehrdimensionale Integration 336
7.6.1 Produktintegration 336
7.6.2 Integration über Standardgebiete 337

7.7 Software 338

7.8 Aufgaben 339

8 Anfangswertprobleme 342

8.1 Einführung 343
8.1.1 Problemklasse und theoretische Grundlagen 343
8.1.2 Möglichkeiten numerischer Lösung 345

8.2 Einschrittverfahren 350
8.2.1 Konsistenz 350
8.2.2 Runge-Kutta-Verfahren 353
8.2.3 Explizite Runge-Kutta-Verfahren 354

8.2.4 Halbimplizite Runge-Kutta-Verfahren 358
8.2.5 Schrittweitensteuerung 359

8.3 Mehrschrittverfahren 363
8.3.1 Verfahren vom Adams-Typ 363
8.3.2 Konvergenztheorie und Verfahrenskonstruktion 368

8.4 Stabilität 376
8.4.1 Inhärente Instabilität 376
8.4.2 Absolute Stabilität bei Einschrittverfahren 378
8.4.3 Absolute Stabilität bei Mehrschrittverfahren 380
8.4.4 Steife Differenzialgleichungen 384

8.5 Anwendung: Lotka-Volterras Wettbewerbsmodell 388

8.6 Software 391

8.7 Aufgaben 392

9 Rand- und Eigenwertprobleme 395

9.1 Problemstellung und Beispiele 395

9.2 Lineare Randwertaufgaben 399
9.2.1 Allgemeine Lösung 399
9.2.2 Analytische Methoden 401
9.2.3 Analytische Methoden mit Funktionenansätzen 404

9.3 Schießverfahren 408
9.3.1 Das Einfach-Schießverfahren 408
9.3.2 Das Mehrfach-Schießverfahren 413

9.4 Differenzenverfahren 418
9.4.1 Dividierte Differenzen 418
9.4.2 Diskretisierung der Randwertaufgabe 419

9.5 Software 424

9.6 Aufgaben 425

10 Partielle Differenzialgleichungen 427

10.1 Differenzenverfahren 427
10.1.1 Problemstellung 427
10.1.2 Diskretisierung der Aufgabe 429
10.1.3 Randnahe Gitterpunkte, allgemeine Randbedingungen 434
10.1.4 Diskretisierungsfehler 444
10.1.5 Ergänzungen 446

10.2 Parabolische Anfangsrandwertaufgaben 448
10.2.1 Eindimensionale Probleme, explizite Methode 448
10.2.2 Eindimensionale Probleme, implizite Methode 454
10.2.3 Diffusionsgleichung mit variablen Koeffizienten 459

10.2.4	Zweidimensionale Probleme	461
10.3	Methode der finiten Elemente	466
10.3.1	Grundlagen	466
10.3.2	Prinzip der Methode der finiten Elemente	469
10.3.3	Elementweise Bearbeitung	471
10.3.4	Aufbau und Behandlung der linearen Gleichungen	477
10.3.5	Beispiele	477
10.4	Software	482
10.5	Aufgaben	483
11	**Lineare Gleichungssysteme, iterative Verfahren**	**487**
11.1	Diskretisierung partieller Differenzialgleichungen	487
11.2	Relaxationsverfahren	489
11.2.1	Konstruktion der Iterationsverfahren	489
11.2.2	Einige Konvergenzsätze	494
11.2.3	Optimaler Relaxationsparameter und Konvergenzgeschwindigkeit	505
11.3	Mehrgittermethoden	508
11.3.1	Ein eindimensionales Modellproblem	508
11.3.2	Eigenschaften der gedämpften Jacobi-Iteration	509
11.3.3	Ideen für ein Zweigitterverfahren	511
11.3.4	Eine eindimensionale Zweigittermethode	513
11.3.5	Eine erste Mehrgittermethode	517
11.3.6	Die Mehrgitter-Operatoren für das zweidimensionale Modellproblem	520
11.3.7	Vollständige Mehrgitterzyklen	522
11.3.8	Komplexität	523
11.3.9	Ein Hauch Theorie	524
11.4	Methode der konjugierten Gradienten	530
11.4.1	Herleitung des Algorithmus	530
11.4.2	Eigenschaften der Methode der konjugierten Gradienten	534
11.4.3	Konvergenzabschätzung	538
11.4.4	Vorkonditionierung	541
11.5	Methode der verallgemeinerten minimierten Residuen	547
11.5.1	Grundlagen des Verfahrens	548
11.5.2	Algorithmische Beschreibung und Eigenschaften	551
11.6	Speicherung schwach besetzter Matrizen	556
11.7	Software	559
11.8	Aufgaben	559
Literaturverzeichnis		**563**
Sachverzeichnis		**576**