

# Lineare Programmierung und Erweiterungen

George B. Dantzig

Chairman of the Operations Research Center  
and Professor of Operations Research  
University of California, Berkeley

Ins Deutsche übertragen und bearbeitet von

Arno Jaeger

Director of Graduate Studies  
and Professor of Mathematics  
University of Cincinnati

Mit 103 Abbildungen



Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1966

# Inhaltsverzeichnis

## Kapitel 1. Der Begriff der linearen Programmierung

1-1 Einführung . . . . .	1
1-2 Das Problem der Programmierung . . . . .	2
1-3 Definition der linearen Programmierung . . . . .	6
1-4 Klassifizierung von Programmierungsproblemen . . . . .	8
1-5 Mathematische Programmierung und Automation . . . . .	11

## Kapitel 2. Ursprünge und Einwirkungen

2-1 Einflüsse des zweiten Weltkrieges. . . . .	14
2-2 Wirtschaftsmodelle und lineare Programmierung . . . . .	19
2-3 Mathematische Ursprünge und Entwicklungen . . . . .	24
2-4 Industrielle Anwendungen der linearen Programmierung. . . . .	33

## Kapitel 3. Aufstellung eines linearen Programmierungsmodells

3-1 Grundbegriffe . . . . .	38
3-2 Konstruktion des Modells . . . . .	40
3-3 Ein Transportproblem . . . . .	42
3-4 Beispiele von Mischungsproblemen . . . . .	50
3-5 Ein Problem der Mischung von Produkten. . . . .	58
3-6 Ein einfaches Lagerhaltungsproblem . . . . .	63
3-7 Ausbildung auf der Arbeitsstätte . . . . .	65
3-8 Das mathematische Problem der linearen Programmierung . . . . .	68
3-9 Probleme . . . . .	71

## Kapitel 4. Lineare Gleichungs- und Ungleichungssysteme

4-1 Systeme von Gleichungen mit der gleichen Lösungsmenge . . . . .	80
4-2 Kanonische Systeme . . . . .	87
4-3 Lineare Ungleichungen . . . . .	95
4-4 Die Eliminationsmethode von FOURIER und MOTZKIN. . . . .	98
4-5 Lineare Programme in Ungleichungsform . . . . .	99
4-6 Probleme . . . . .	103

## Kapitel 5. Die Simplexmethode

5-1 Der Simplexalgorithmus. . . . .	110
5-2 Die zwei Phasen der Simplexmethode . . . . .	118
5-3 Probleme . . . . .	130

## Kapitel 6. Beweis des Simplexalgorithmus und des Dualitätssatzes

3-1 Induktiver Beweis des Simplexalgorithmus . . . . .	139
3-2 Äquivalente duale Formen. . . . .	143
3-3 Beweis des Dualitätssatzes. . . . .	148
3-4 Fundamentalsätze über Dualität . . . . .	155

6-5 Multiplikatoren von LAGRANGE . . . . .	163
6-6 Probleme . . . . .	167

### Kapitel 7. Die Geometrie linearer Programme

7-1 Konvexe Gebiete . . . . .	171
7-2 Die Simplexmethode als steilster Anstieg entlang der Kanten . . . . .	181
7-3 Die Simplexinterpretation der Simplexmethode . . . . .	185
7-4 Probleme . . . . .	191

### Kapitel 8. Pivot-Operationen, Vektorräume, Matrizen und ihre Inversen

8-1 Theorie der Pivots . . . . .	200
8-2 Vektorräume . . . . .	205
8-3 Matrizen . . . . .	212
8-4 Die Inverse einer Matrix . . . . .	219
8-5 Der Simplexalgorithmus in Matrizenform . . . . .	226
8-6 Probleme . . . . .	234

### Kapitel 9. Die Simplexmethode mit Benutzung von Multiplikatoren

9-1 Ein Beispiel mit Multiplikatoren . . . . .	244
9-2 Die allgemeine Methode mit Benutzung von Multiplikatoren . . . . .	251
9-3 Rechenregeln bei Benutzung von Multiplikatoren . . . . .	255
9-4 Probleme . . . . .	260

### Kapitel 10. Endlichkeit der Simplexmethode bei Störung

10-1 Die Möglichkeit des Kreisens beim Simplexalgorithmus . . . . .	262
10-2 Störung der Konstanten zur Vermeidung von Entartung . . . . .	266
10-3 Probleme . . . . .	272

### Kapitel 11. Varianten des Simplexalgorithmus

11-1 Komplementäre primale und duale Basen . . . . .	276
11-2 Die duale Simplexmethode . . . . .	278
11-3 Ein selbstdualer parametrischer Algorithmus . . . . .	280
11-4 Der primale-duale Algorithmus . . . . .	283
11-5 Ein anderes Kriterium für Phase I . . . . .	289
11-6 Probleme . . . . .	290

### Kapitel 12. Der Preisbegriff in der linearen Programmierung

12-1 Der Preismechanismus der Simplexmethode . . . . .	292
12-2 Beispiele dualer Probleme . . . . .	299
12-3 Die Vorzeichenvereinbarung bei Preisen . . . . .	304
12-4 Erläuterung der Sensitivitätsanalyse . . . . .	305
12-5 Probleme . . . . .	316

### Kapitel 13. Spiele und lineare Programme

13-1 Matrixspiele . . . . .	318
13-2 Äquivalenz von Matrixspielen und linearen Programmen und der Minimaxsatz . . . . .	328

13-3 Konstruktive Lösung eines Matrixspiels (ein anderer Beweis des Minimaxsatzes) . . . . .	334
13-4 Probleme . . . . .	341

#### Kapitel 14. Das klassische Transportproblem

14-1 Geschichtliche Übersicht . . . . .	343
14-2 Elementare Transporttheorie. . . . .	344
14-3 Algorithmus für das Transportproblem . . . . .	353
14-4 Probleme . . . . .	359

#### Kapitel 15. Optimale Zuordnung und andere Zuteilungsprobleme

15-1 Das Problem der optimalen Zuordnung . . . . .	361
15-2 Zuordnung mit Überschuß und Defizit . . . . .	367
15-3 Feste Werte und unzulässige Quadrate . . . . .	376
15-4 Probleme . . . . .	379

#### Kapitel 16. Das Umladeproblem

16-1 Eine äquivalente Formulierung des Modells . . . . .	382
16-2 Die Äquivalenz von Transportproblemen und Umladeproblemen . . . . .	390
16-3 Lösung eines Umladeproblems durch die Simplexmethode . . . . .	394
16-4 Probleme . . . . .	398

#### Kapitel 17. Netzwerke und das Umladeproblem

17-1 Graphen und Bäume . . . . .	400
17-2 Interpretation der Simplexmethode mit Hilfe des Netzwerks . . . . .	406
17-3 Das Problem des kürzesten Weges . . . . .	410
17-4 Probleme . . . . .	416

#### Kapitel 18. Variablen mit oberen Grenzen

18-1 Der allgemeine Fall . . . . .	418
18-2 Das Transportproblem mit beschränkten Variablen und Verallgemeinerungen . . . . .	428
18-3 Probleme . . . . .	436

#### Kapitel 19. Maximaler Fluß in Netzwerken

19-1 Die Theorie von FORD und FULKERSON . . . . .	438
19-2 Die Baumethode zur Lösung von Maximalflußproblemen. . . . .	452
19-3 Probleme . . . . .	457

#### Kapitel 20. Die Primale-duale Methode bei Transportproblemen

20-1 Einführung . . . . .	458
20-2 Der Algorithmus von FORD und FULKERSON. . . . .	459
20-3 Probleme . . . . .	466

#### Kapitel 21. Das Problem der gewichteten Zuteilung

21-1 Die fast dreieckige Form der Basis . . . . .	468
21-2 Die Graphenstruktur der Basis . . . . .	476

21-3 Eine Teilklasse mit optimalen Basen von Dreiecksform . . . . .	481
21-4 Probleme . . . . .	488

### Kapitel 22. Programme mit veränderlichen Koeffizienten

22-1 Das verallgemeinerte Programm von WOLFE . . . . .	490
22-2 Bemerkungen über Spezialfälle . . . . .	498
22-3 Probleme . . . . .	505

### Kapitel 23. Ein Dekompositionsprinzip für lineare Programme

23-1 Das allgemeine Prinzip . . . . .	507
23-2 Gespräch über das Dekompositionsprinzip . . . . .	515
23-3 Zentralplanung ohne vollständige Information am Zentrum . . . . .	523
23-4 Dekomposition vielstufiger Programme . . . . .	528
23-5 Probleme . . . . .	532

### Kapitel 24. Konvexe Programmierung

24-1 Allgemeine Theorie . . . . .	534
24-2 Homogene Zielfunktionen und das Problem des chemischen Gleichgewichts . . . . .	543
24-3 Konvex-separable Zielfunktionen . . . . .	547
24-4 Quadratische Programmierung . . . . .	555
24-5 Probleme . . . . .	564

### Kapitel 25. Ungewißheit

25-1 Planung unter Berücksichtigung variabler Kosten . . . . .	566
25-2 Planung bei ungewisser Nachfrage . . . . .	571
25-3 Über vielstufige Probleme . . . . .	575
25-4 Probleme . . . . .	580

### Kapitel 26. Extremalprobleme mit diskreten Variablen

26-1 Überblick über die Methoden . . . . .	583
26-2 GOMORYS Methode der ganzzahligen Formen . . . . .	590
26-3 Über die Bedeutung der Lösung linearer Programmierungsprobleme, bei denen ganzzahlige Variablen auftreten. . . . .	608

### Kapitel 27. STIGLERS Ernährungsmodell, Beispiel einer Formulierung und Lösung

27-1 Probleme beim Aufstellen eines Modells . . . . .	625
27-2 Numerische Lösung des Ernährungsproblems . . . . .	632
27-3 Probleme . . . . .	635

### Kapitel 28. Das Aufstellen eines Flugplans bei ungewisser Nachfrage

28-1 Beschreibung und Formulierung . . . . .	644
28-2 Numerische Lösung des Flugplanproblems . . . . .	659
Literaturverzeichnis . . . . .	671
Sachverzeichnis . . . . .	700
Namenverzeichnis . . . . .	710