

Fredi Tröltzsch

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Theorie, Verfahren und Anwendungen

2., überarbeitete Auflage

STUDIUM



Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Beispiele	1
1.1	Was ist optimale Steuerung?	1
1.2	Beispiele konvexer Aufgaben	2
1.2.1	Optimale stationäre Aufheizung	2
1.2.2	Optimale instationäre Randtemperatur	4
1.2.3	Optimales Schwingen	5
1.3	Beispiele nichtkonvexer Probleme	6
1.3.1	Aufgaben mit semilinear elliptischer Gleichung	6
1.3.2	Probleme mit semilinear parabolischer Gleichung	7
1.4	Grundkonzepte im endlichdimensionalen Fall	8
1.4.1	Endlichdimensionale Aufgabe der optimalen Steuerung	8
1.4.2	Existenz optimaler Steuerungen	9
1.4.3	Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung	10
1.4.4	Adjungierter Zustand und reduzierter Gradient	11
1.4.5	Lagrangefunktion	13
1.4.6	Diskussion der Variationsungleichung	14
1.4.7	Formulierung als Karush-Kuhn-Tucker-System	14
2	Linear-quadratische elliptische Probleme	17
2.1	Lineare normierte Räume	17
2.2	Sobolewräume	19
2.2.1	L^p -Räume	19
2.2.2	Reguläre Gebiete	21
2.2.3	Schwache Ableitungen und Sobolewräume	21
2.3	Schwache Lösungen elliptischer Gleichungen	24
2.3.1	Poissongleichung	24
2.3.2	Randbedingung dritter Art	27
2.3.3	Differentialoperator in Divergenzform	30
2.4	Lineare Abbildungen	32
2.4.1	Lineare stetige Operatoren und Funktionale	32
2.4.2	Schwache Konvergenz	35
2.5	Existenz optimaler Steuerungen	38
2.5.1	Optimale stationäre Temperaturquelle	38
2.5.2	Optimale stationäre Randtemperatur	42
2.5.3	Allgemeinere elliptische Gleichungen und Zielfunktionale *	43
2.6	Differenzierbarkeit in Banachräumen	44
2.7	Adjungierte Operatoren	47
2.8	Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung	49
2.8.1	Quadratische Optimierungsaufgabe im Hilbertraum	50
2.8.2	Optimale stationäre Temperaturquelle	51

2.8.3	Stationäre Temperaturquelle und Randbedingung dritter Art . . .	59
2.8.4	Optimale stationäre Randtemperatur	60
2.8.5	Ein lineares Optimalsteuerungsproblem	63
2.9	Konstruktion von Testaufgaben	63
2.9.1	Bang-Bang-Steuerung	64
2.9.2	Verteilte Steuerung und Neumann-Randbedingung	65
2.10	Das formale Lagrangeprinzip	67
2.11	Weitere Beispiele *	71
2.11.1	Differentialoperator in Divergenzform	71
2.11.2	Optimale stationäre Temperaturquelle mit vorgegebener Außen- temperatur	72
2.12	Numerische Verfahren	72
2.12.1	Bedingtes Gradientenverfahren	73
2.12.2	Gradienten-Projektionsverfahren	76
2.12.3	Überführung in ein endlichdimensionales quadratisches Optimierungsproblem	77
2.12.4	Primal-duale Aktive-Mengen-Strategie	80
2.13	Adjungierter Zustand als Lagrangescher Multiplikator *	85
2.13.1	Elliptische Gleichungen mit Daten aus V^*	85
2.13.2	Anwendung beim Beweis von Optimalitätsbedingungen	86
2.13.3	Adjungierter Zustand als Multiplikator	88
2.14	Höhere Regularität für elliptische Aufgaben *	89
2.14.1	Grenzen des Zustandsraums $H^1(\Omega)$	89
2.14.2	Sobolew-Slobodetskii-Räume	89
2.14.3	Höhere Regularität von Lösungen	90
2.15	Regularität optimaler Steuerungen *	91
2.16	Übungsaufgaben	93
3	Linear-quadratische parabolische Probleme	95
3.1	Einführung	95
3.2	Die Fourierrmethode im örtlich eindimensionalen Fall	99
3.2.1	Eindimensionale Modellprobleme	99
3.2.2	Integraldarstellung von Lösungen – Greensche Funktion	100
3.2.3	Notwendige Optimalitätsbedingungen	102
3.2.4	Bang-Bang-Prinzip	106
3.3	Schwache Lösungen in $W_2^{1,0}(Q)$	110
3.4	Schwache Lösungen in $W(0, T)$	113
3.4.1	Abstrakte Funktionen	113
3.4.2	Abstrakte Funktionen und parabolische Gleichungen	116
3.4.3	Vektorwertige Distributionen	116
3.4.4	Zugehörigkeit schwacher Lösungen aus $W_2^{1,0}(Q)$ zu $W(0, T)$	119
3.5	Parabolische Optimalsteuerungsprobleme	123
3.5.1	Optimale instationäre Randtemperatur	123
3.5.2	Optimale instationäre Temperaturquelle	124
3.6	Notwendige Optimalitätsbedingungen	125
3.6.1	Hilfssatz für adjungierte Operatoren	126
3.6.2	Optimale instationäre Randtemperatur	127
3.6.3	Optimale instationäre Temperaturquelle	130

3.6.4	Differentialoperator in Divergenzform *	131
3.7	Numerische Lösungstechniken	134
3.7.1	Gradienten-Projektionsverfahren	134
3.7.2	Aufstellen des reduzierten Problems	135
3.8	Herleitung der verwendeten Fourierreihenentwicklungen	138
3.9	Parabolische Gleichungen in $L^2(0, T; V^*)$ *	141
3.10	Übungsaufgaben	143
4	Steuerung semilinearer elliptischer Gleichungen	145
4.1	Vorbemerkungen	145
4.2	Semilineare elliptische Modellgleichung	146
4.2.1	Motivation des weiteren Vorgehens	146
4.2.2	Lösungen in $H^1(\Omega)$	147
4.2.3	Stetige Lösungen	151
4.2.4	Abschwächung der Voraussetzungen	154
4.3	Nemytskii-Operatoren	156
4.3.1	Stetigkeit von Nemytskii-Operatoren	156
4.3.2	Differenzierbarkeit von Nemytskii-Operatoren	158
4.3.3	Ableitungen in weiteren L^p -Räumen *	162
4.4	Existenz optimaler Steuerungen	163
4.4.1	Grundvoraussetzungen des Kapitels	163
4.4.2	Verteilte Steuerung	165
4.5	Der Steuerungs-Zustands-Operator	168
4.5.1	Verteilte Steuerung	169
4.5.2	Randsteuerung	171
4.6	Notwendige Optimalitätsbedingungen	171
4.6.1	Verteilte Steuerung	171
4.6.2	Randsteuerung	174
4.7	Anwendung des formalen Lagrangeprinzips	176
4.8	Pontrjaginsches Maximumprinzip *	178
4.8.1	Hamiltonfunktionen	178
4.8.2	Maximumprinzip	179
4.9	Ableitungen zweiter Ordnung	180
4.10	Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung	184
4.10.1	Grundideen hinreichender Optimalitätsbedingungen	184
4.10.2	Die Zwei-Norm-Diskrepanz	187
4.10.3	Verteilte Steuerung	190
4.10.4	Randsteuerung	198
4.10.5	Berücksichtigung stark aktiver Restriktionen *	199
4.10.6	Fälle ohne Zwei-Norm-Diskrepanz	203
4.10.7	Lokale Optimalität in $L^r(\Omega)$	204
4.11	Numerische Verfahren	205
4.11.1	Gradienten-Projektionsverfahren	205
4.11.2	Grundidee des SQP-Verfahrens	205
4.11.3	Das SQP-Verfahren für elliptische Probleme	207
4.12	Übungsaufgaben	210

5	Steuerung semilinearer parabolischer Gleichungen	211
5.1	Die semilineare parabolische Modellgleichung	211
5.2	Grundvoraussetzungen des Kapitels	213
5.3	Existenz optimaler Steuerungen	214
5.4	Steuerungs-Zustands-Operator	217
5.5	Notwendige Optimalitätsbedingungen	220
5.5.1	Verteilte Steuerung	221
5.5.2	Randsteuerung	224
5.6	Pontrjaginsches Maximumprinzip *	226
5.7	Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung	227
5.7.1	Ableitungen zweiter Ordnung	227
5.7.2	Verteilte Steuerung	229
5.7.3	Randsteuerung	233
5.7.4	Ein Fall ohne Zwei-Norm-Diskrepanz	234
5.8	Testaufgaben	235
5.8.1	Testaufgabe mit Steuerungsrestriktionen	236
5.8.2	Aufgabe mit integraler Zustandsrestriktion *	238
5.9	Numerische Verfahren	243
5.9.1	Gradientenverfahren	243
5.9.2	Das SQP-Verfahren	244
5.10	Weitere parabolische Probleme *	247
5.10.1	Phasenfeldmodell	247
5.10.2	Instationäre Navier-Stokes-Gleichungen	249
5.11	Übungsaufgaben	253
6	Optimierungsaufgaben im Banachraum	254
6.1	Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen	254
6.1.1	Konvexe Aufgaben	254
6.1.2	Differenzierbare Aufgaben	259
6.1.3	Eine semilineare elliptische Aufgabe	263
6.2	Steuerprobleme mit Zustandsbeschränkungen	265
6.2.1	Konvexe Aufgaben	266
6.2.2	Eine nichtkonvexe Aufgabe	273
6.3	Übungsaufgaben	276
7	Ergänzungen zu partiellen Differentialgleichungen	277
7.1	Einbettungssätze	277
7.2	Elliptische Gleichungen	278
7.2.1	Elliptische Regularität und Stetigkeit von Lösungen	278
7.2.2	Methode von Stampacchia	279
7.2.3	Elliptische Gleichungen mit Maßen	284
7.3	Parabolische Gleichungen	285
7.3.1	Lösungen in $W(0, T)$	285
7.3.2	Stetige Lösungen	293
	Index	298
	Literaturverzeichnis	301