

VORLESUNGEN
ÜBER FUNKTIONENTHEORIE

VON

DR. ALEXANDER DINGHAS

O. PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER FREIEN UNIVERSITÄT BERLIN

MIT 25 ABBILDUNGEN



SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GOTTINGEN · HEIDELBERG
1961

Inhaltsverzeichnis

Erster Teil

Die Grundlagen der Funktionentheorie

Erstes Kapitel

Die komplexe Ebene

1. Der Körper K der komplexen Zahlen	1
2. Der Körper der reellen Zahlen als Teilkörper von K . Isomorphe Darstellungen.	2
3. Elementare Geometrie der komplexen Ebene	5
4. Die Riemannsche Kugel und die Zahl $z = \infty$	6
5. Gruppen. Lineare Transformationen	8
6. Metrisierungsfragen. Bewegungen der komplexen Ebene	11
7. Bemerkungen und historische Zusammenhänge	13

Ergänzungen und Aufgaben zum ersten Kapitel. 15

1. Die Formel von MOIVRE. 2. Gleichungen elementarer Gebilde. 3. Das Doppelverhältnis von vier Punkten. 4. Spezielle Gruppen. 5. Drehungen der Riemannschen Kugel. 6. Bewegungen des Einheitskreises. 7. Wurzeloperationen.

Zweites Kapitel

Topologie der komplexen Ebene. Die Cauchysche Konvergenztheorie. Stetige Abbildungen

8. Grundlegende Begriffsbildungen	17
9. Offene und abgeschlossene Punktmenge.	18
10. Die Cauchysche Konvergenztheorie	20
11. Der Überdeckungssatz von HEINE-BOREL und der Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS	22
12. Kurven	24
13. Eine Peano-Kurve	27
14. Gebiete und Kontinuen. Der Begriff des Zusammenhangs	29
15. Abbildungen durch eindeutige komplexe Funktionen	30
16. Linienintegrale komplexer Funktionen	32
17. Bemerkungen und Literaturnachweis	33

Ergänzungen und Aufgaben zum zweiten Kapitel 34

1. Oberer und unterer Limes von Punktmenge. 2. Anwendungen. 3. Offener Kern. 4. Der Kern einer Gebietsfolge. 5. Topologische Abbildungen. 6. Vereinigung von offenen und abgeschlossenen Punktmenge.

Drittes Kapitel

Lokale Eigenschaften der eindeutigen analytischen Funktionen

18. Definition der eindeutigen analytischen Funktion	36
19. Das Fundamentallemma der Funktionentheorie	38

20. Lokale Darstellungen von $w(z)$	39
21. Der analytische Charakter von $w'(z)$. Die Cauchy-Taylor-Entwicklung von $w(z)$	43
22. Hebbare Stellen. Erweiterung des Regularitätsbegriffes	45
23. Pole und wesentliche Singularitäten. Die Entwicklung von LAURENT-WEIERSTRASS	48
24. Der Satz von CASORATI-WEIERSTRASS	51
25. Bemerkungen und Literaturnachweis	52
Ergänzungen und Aufgaben zum dritten Kapitel	56
1. Der Konvergenzradius einer Potenzreihe. 2. MORERAS Definition der eindeutigen analytischen Funktion. 3. Eine Definition der regulären analytischen Funktion. 4. Der Satz von LOOMAN-MENCHOFF. 5. Der Satz von CAUCHY-LIOUVILLE. 6. Bestimmung einer eindeutigen analytischen Funktion durch abzählbar viele Werte. 7. Aufgaben dazu.	

Viertes Kapitel

Die Hauptsätze der Cauchyschen Funktionentheorie

26. Der Fundamentalsatz der Funktionentheorie	62
27. Die allgemeine Cauchy-Formel	64
28. Der Residuensatz von CAUCHY	65
29. Erste Anwendungen des Residuensatzes. Die Poissonschen Formeln für den Vollkreis und den Halbkreis	67
30. Bestimmte Integrale rationaler und trigonometrischer Funktionen	70
31. Die Cauchyschen Integralsätze in allgemeinen Gebieten von endlichem Zusammenhang	73
32. Nullhomologe und nullhomotope Kurven. Die allgemeine Form des Fundamentalsatzes der Funktionentheorie	75
33. Homologie- und Homotopiegruppen. Mehrdeutige Funktionen	77
34. Literaturhinweise	81
Ergänzungen und Aufgaben zum vierten Kapitel	83
1. Definition der trigonometrischen Funktionen. 2. Nullstellenfragen. 3. Residuen von $\cotg \pi z$ bzw. $1/\sin \pi z$. 4. Die Formel von PLANA-ABEL-CAUCHY. 5. Eine allgemeine Formel von CAUCHY. Der Satz von ROUCHÉ. 6. Die Ungleichungen von HADAMARD und BOREL. 7. Eine Ungleichung von BOREL und CARATHÉODORY. 8. Eine Verallgemeinerung des Cauchy-Liouvilleschen Satzes. 9. Aufgaben. 10. Ein Satz von LIOUVILLE. 11. Eine Ungleichung von H. A. SCHWARZ.	

Zweiter Teil

Die Grundlagen der Riemann-Weierstraßschen Funktionentheorie

Fünftes Kapitel

Erzeugung analytischer Funktionen durch Grenzprozesse

Der Riemann-Weierstraßsche Begriff der analytischen Funktion

35. Funktionenräume	95
36. Kompaktheitsfragen. Vorbereitende Tatsachen	96
37. Die Sätze von ASCOLI und VITALI	99
38. Reihen. Unendliche Produkte. Integrale	102

39. Der Weierstraßsche Begriff der analytischen Funktion. Der Satz von POINCARÉ-VOLTERRA	106
40. Analytische Fortsetzung in der Nähe einer isolierten singulären Stelle. Algebraische Funktionselemente	112
41. Der Begriff des analytischen Gebildes	115
42. Der Begriff der Riemannschen Fläche. Überlagerungsflächen	118
43. Nicht fortsetzbare Reihen. Der Turánsche Beweis des Fabry'schen Lückensatzes	126
44. Geschichtliche Zusammenhänge und Literaturangaben	133
Ergänzungen und Aufgaben zum fünften Kapitel	137
1. Ein Beweis des Auswahlssatzes. 2. Der Satz von MITTAG-LEFFLER. 3. Nochmals die trigonometrischen Funktionen. 4. Die Weierstraßsche Produktdarstellung von $w(z)$. 5. Die elliptischen Funktionen. 6. Additionsformeln. 7. Der Monodromiesatz. 8. Das Weierstraßsche Permanenzprinzip der Funktionalgleichungen. 9. Algebroide und algebraische Funktionen. 10. PÓLYA's Vermutung über Potenzreihen mit Fabry-Lücken. 11. OSTROWSKI's Vertiefung des Hadamardschen Lückensatzes. 12. MORDELL's Beweis des Hadamardschen Lückensatzes. 13. Ein Satz von FATOU und PÓLYA. 14. Die Umkehrung einer Potenzreihe.	

Sechstes Kapitel

Die Eulersche Gammafunktion und die Riemannsche Zetafunktion

45. Konvexe bzw. logarithmisch konvexe Funktionen	159
46. Der Satz von BOHR und MOLLERUP	163
47. Funktionalgleichungen	165
48. Das asymptotische Verhalten von $\Gamma(s)$	169
49. Dirichlet-Reihen. Die Zetafunktion von RIEMANN	175
50. Zahlentheoretische Eigenschaften von $\zeta(s)$. Die Eulersche Produktdarstellung und der Satz von HADAMARD-DE LA VALLÉE-POUSSIN.	180
51. Beweis des Primzahlsatzes	183
52. Geschichtliche Zusammenhänge und Literaturangaben	188
Ergänzungen und Aufgaben zum sechsten Kapitel	190
1. Ein allgemeiner Satz von HURWITZ. 2. Zwei Funktionalgleichungen von LEGENDRE. 3. KUMMER's Fourier-Entwicklung von $\log \Gamma(\sigma)$. 4. Die Konvergenzabszissen einer allgemeinen Dirichlet-Reihe. 5. Der Abelsche Grenzwertsatz für allgemeine Dirichlet-Reihen. 6. Der Satz von VIVANTI-PRINGSHEIM-LANDAUI. 7. FABRY's Lückensatz für Dirichlet-Reihen. 8. Ein Satz von HARALD BOHR. 9. Der Fall linear unabhängiger Exponenten. 10. Die Laurent-Weierstraßsche Entwicklung der Zetafunktion.	

Dritter Teil

Maximumprinzip und Werteverteilung

Siebentes Kapitel

Majorisierungs- und Wachstumsprobleme

53. Das Maximumprinzip für subharmonische Funktionen	201
54. CARLEMANS Prinzip der harmonischen Majorisierung. LINDELÖF's Verallgemeinerung des Maximumprinzips	203

55. Konvexitätseigenschaften des Maximums von subharmonischen Funktionen. Der Dreikreisesatz von HADAMARD und das Schwarzsche Lemma . . .	206
56. Einbeziehung der Nullstellen von $w(z)$. Blaschkesche Sätze	210
57. Die Formel von CARLEMAN und der Satz von CARLSON-NEVANLINNA . . .	212
58. Zwei Sätze von LINDELÖF	215
59. Der allgemeine Konvexitätssatz. Der Satz von WIMAN.	222
60. Der Satz von DENJOY-CARLEMAN-AHLFORS.	225
61. Geschichtliche Zusammenhänge und Literaturnachweis	231
Ergänzungen und Aufgaben zum siebenten Kapitel	233
1. Eine wichtige Identität. 2. Nochmals das Maximumprinzip. 3. Eine Ungleichung von AHLFORS. 4. Verallgemeinerung des vorstehenden Ergebnisses. 5. Der Satz von JULIA-WOLFF-CARATHÉODORY. 6. Der Satz von MILLOUX-SCHMIDT. 7. Ein Satz von FATOU und RIESZ.	

Achtes Kapitel

Geometrische Funktionentheorie. Konforme Abbildung

62. Nochmals die linearen Transformationen	244
63. Fixpunkte. Elliptische, hyperbolische und parabolische Transformationen	245
64. Spiegelung an einem Kreis. Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip	247
65. Zusammenhänge mit der hyperbolischen Geometrie. PICKS Formulierung des Schwarzschen Lemmas	251
66. Schlichte Funktionen. Der Riemannsche Abbildungssatz	255
67. Das Dirichletsche Problem. Greensche Funktion und harmonisches Maß .	260
68. Approximationsfragen. Die Symmetrieeigenschaft der Greenschen Funktion. LINDELÖFS Kontraktionstheorem	267
69. Funktionen auf Riemannschen Flächen. Konstruktion der Modulfunktion durch das Spiegelungsprinzip	274
70. Kapazitätsfragen. Die Evans-Selbergsche Funktion	279
71. Anwendung der Modulfunktion auf den Beweis der Sätze von PICARD, LANDAU und SCHOTTKY	287
72. BLOCHs Methode zum Beweis der Sätze von PICARD, LANDAU und SCHOTTKY	289
73. Der allgemeine Satz von PICARD und der Satz von JULIA	294
74. Geschichtliche Zusammenhänge und Literaturangaben	298
Ergänzungen und Aufgaben zum achten Kapitel	303
1. Der isometrische Kreis einer linearen Transformation. 2. Der Fundamentalbereich einer Gruppe. 3. Der Begriff der automorphen Funktion. 4. Eine Ungleichung von PLEMELJ und CARATHÉODORY. 5. Der Verzerrungssatz von KOEBE und BIEBERBACH 6. Der Drehungssatz von BIEBERBACH-GOLUSIN. 7. Das Koeffizientenproblem. 8. Die konforme Abbildung eines Polygons auf eine Halbebene. 9. Der Ahlforsche Verzerrungssatz. 10. Kanonische konforme Abbildungen. 11. CARATHÉODORYs Verschärfung des großen Picardschen Satzes. 12. Eine Ungleichung von OSTROWSKI-NEVANLINNA. 13. Das Normalitätskriterium von CARATHÉODORY und LANDAU. 14. Der Montelsche Beweis des Picardschen Satzes. 15. Nochmals der Satz von JULIA. 16. Das Problem der Ränderzuordnung. 17. Ein Satz von PICARD. 18. Das Uniformisierungsproblem. 19. Durchführung des Uniformisierungsbeweises. 20. Das alternierende Verfahren von SCHWARZ. 21. Der transfinite Durchmesser einer Punktmenge.	

Neuntes Kapitel

Eindeutige analytische Funktionen in der Umgebung einer wesentlichen isolierten Singularität

75. Die Wachstumscharakteristik einer meromorphen Funktion	336
76. Der Nevanlinnasche Konvexitätssatz der charakteristischen Funktion . . .	338
77. Charakterisierung rationaler Funktionen	342
78. Der Begriff der lokalen Charakteristik. Charakterisierung der Stellen rationalen Charakters	344
79. Der Nevanlinnasche Invariansatz. Der Begriff der Ordnung und des Konvergenzexponenten	350
80. Die Ordnung eines kanonischen Produktes. F. NEVANLINNAS Beweis der Produktdarstellung einer meromorphen Funktion	355
81. Der Nevanlinnasche Hauptsatz der Werteverteilungstheorie	360
82. Die Nevanlinnasche Defektrelation	366
83. Der Satz von PICARD-BOREL	367
84. Meromorphe Funktionen im Einheitskreis	370
85. Geschichtliche Zusammenhänge und Literaturangaben	374
Ergänzungen und Aufgaben zum neunten Kapitel	378
1. LITTLEWOODS Begriff der subordinierten Funktion. LEHTOS Maximumprinzip. 2. Eine Ungleichung von AHLFORS. 3. Nochmals der Picard-Borelsche Satz. 4. BEURLINGS Verallgemeinerung eines Satzes von FATOU. 5. Die Theorie von NEVANLINNA-AF HÄLLSTRÖM. 6. Die Nevanlinna-Selbergsche Theorie der algebroiden Funktionen. 7. Umkehrung des Nevanlinnaschen Fundamentalsatzes. 8. Abhängigkeit des Defektes von der Wahl des Nullpunktes. 9. Ein allgemeiner Satz über die Defektmenge einer meromorphen Funktion.	
Literaturverzeichnis	393
Namen- und Sachverzeichnis	396