

Wilhelm Rust

# Nichtlineare Finite-Elemente- Berechnungen

Kontakt, Geometrie, Material

Mit 203 Abbildungen

STUDIUM



**VIEWEG+  
TEUBNER**

# Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungsweise ..... XII

<b>1</b>	<b>Lösung der nichtlinearen Gleichungen.....</b>	<b>1</b>
1.1	Newton-Raphson-Verfahren .....	1
1.2	Andere Lösungsverfahren .....	3
1.3	Schrittweitensteuerung.....	4
1.4	Eindimensionale Minimum-Suche ( <i>line search</i> ).....	4
1.5	Konvergenzkriterien .....	6

## Hauptabschnitt I: Geometrische Nichtlinearitäten

<b>2</b>	<b>Geometrisch nichtlineares Verhalten.....</b>	<b>8</b>
2.1	Grundbegriffe der geometrischen Nichtlinearitäten.....	8
2.2	Theorie 2. Ordnung, Gleichgewicht am verformten System.....	9
2.2.1	Motivation und FE-Umsetzung .....	9
2.2.2	Warum Theorie 2. Ordnung?.....	11
2.2.3	Lineares Beulen.....	13
2.2.4	Korrekte Spannungsversteifungs-Matrix für den Balken .....	17
2.3	Große Drehungen (Rotationen).....	20
2.3.1	Geeignetes Dehnungsmaß: Green-Lagrange-Dehnungen.....	20
2.3.2	Das Prinzip der virtuellen Arbeiten bei geometrisch nichtlinearen Problemstellungen .....	24
2.3.3	Lösung der nichtlinearen Gleichungen mit dem Newton-Raphson- Verfahren .....	25
2.3.4	Testproblem Zweibock.....	28
2.3.5	Mitdrehende Formulierung ( <i>Co-rotational formulation</i> ).....	32
2.4	Große Dehnungen .....	46
2.4.1	Eindimensionale Betrachtungen .....	46
2.4.2	Zugehörige Spannungen.....	49
2.4.3	Übergang ins Zwei- und Dreidimensionale .....	52
2.4.4	Hencky-Dehnungen in Symbolen der Kontinuumsmechanik.....	53
2.4.5	Klassische Updated-Lagrange-Formulierung.....	53
2.4.6	Logarithmische Dehnungen und mitdrehende Formulierung .....	57
<b>3</b>	<b>Stabilitätsprobleme.....</b>	<b>59</b>
3.1	Phänomene.....	59
3.2	Bedingungen für kritische Punkte, Indifferenzkriterium .....	64
3.2.1	Allgemeines.....	64
3.2.2	Formulierungen der Instabilitätsbedingung.....	66
3.2.3	Modalanalyse (Eigenfrequenzanalyse) und Stabilitätsprobleme .....	68
3.2.4	Direkte Identifikation kritischer Punkte durch ein erweitertes System .....	71
3.3	Bedeutung des Eigenvektors.....	73
3.4	Imperfektionen.....	74

3.4.1	Imperfektion durch Kräfte .....	74
3.4.2	Imperfektion durch geometrische Vorgaben.....	74
3.4.3	Imperfektion durch eine lineare Beulanalyse.....	75
3.4.4	Begleitende Eigenwert-Analyse.....	75
3.4.5	Imperfektionsempfindlichkeit.....	77
3.4.6	Größe der Imperfektion.....	79
<b>4</b>	<b>Lastinkrementierung in einer nichtlinearen Berechnung .....</b>	<b>81</b>
4.1	Kraftsteuerung.....	81
4.2	Einfache Verschiebungssteuerung.....	81
4.3	Verschiebungssteuerung mit Kraftgrößen.....	83
4.4	Bogenlängenverfahren (arc-length method).....	84
4.4.1	Suche senkrecht zur letzten Sekante .....	85
4.4.2	Modellproblem.....	86
4.4.3	Suche senkrecht zur ersten Tangente.....	88
4.4.4	Suche senkrecht zur aktuellen Tangente.....	89
4.4.5	Suche auf einem Kreis bzw. einer Hyperkugel.....	92
4.4.6	Anfangswerte und Bogenlänge.....	97
4.4.7	Lösung des erweiterten Systems.....	99
<b>Hauptabschnitt II: Nichtlineares Materialverhalten</b>		
<b>5</b>	<b>Grundzüge der Materialmodelle .....</b>	<b>102</b>
5.1	Repräsentative eindimensionale Grundelemente.....	102
5.1.1	Elastizität (Hooke-Element).....	102
5.1.2	Plastizität (St.-Venant-Element) .....	103
5.1.3	Zeitabhängiges Verhalten (Newton-Element).....	103
5.2	Aus Grundelementen zusammengesetzte Modelle.....	104
5.2.1	Elasto-Plastizität (Prandtl-Element).....	104
5.2.2	Maxwell-Element für Kriechen .....	106
5.2.3	Kelvin-Voigt-Element für Visko-Elastizität .....	108
5.2.4	Erweitertes Viskoelastizitätsmodell.....	111
5.2.5	Bingham-Modell als Beispiel für Visko-Plastizität .....	111
5.2.6	Burghers-Modell.....	112
5.3	Berücksichtigung des Materialverhaltens in der FEM .....	114
<b>6</b>	<b>Theorie und Numerik der linearen Visko-Elastizität .....</b>	<b>116</b>
6.1	Grundformeln für den eindimensionalen Fall .....	116
6.2	Einführung von Zeitschritten.....	118
6.3	Numerik.....	119
6.4	Werkstofftangente .....	121
6.5	Algorithmus.....	121
6.6	Mehrdimensionaler Fall .....	122
6.6.1	Kugeltensor und Deviator .....	122
6.6.2	Spannungsberechnung .....	123
6.6.3	Werkstofftangente.....	124

6.6.4	Algorithmus.....	126
6.7	Temperaturabhängigkeit .....	127
6.7.1	Grundlagen thermo-rheologisch einfacher Materialien, Pseudo-Zeit.....	128
6.7.2	Zeitintegration .....	129
6.7.3	Shift-Funktionen.....	132
6.7.4	Spannungen .....	134
6.7.5	Tangente .....	134
6.7.6	Algorithmus.....	134
6.8	Ebener Spannungs- und Verzerrungszustand.....	135
6.8.1	Ebener Verzerrungszustand.....	135
6.8.2	Ebener Spannungszustand .....	136
6.9	Beispielrechnungen.....	138
6.9.1	Zu Kapitel 6.1.....	138
6.9.2	Zu Kapitel 6.2.....	139
6.9.3	Zu Kapitel 6.3.....	140
<b>7</b>	<b>Theorie und Numerik des Kriechens .....</b>	<b>142</b>
7.1	Grundsätzliches.....	142
7.2	Zeitintegration beim Kriechen .....	146
7.2.1	Differenzenquotienten .....	146
7.2.2	Kriechbeispiel.....	146
7.2.3	Explizite Zeitintegration.....	147
7.2.4	Variabler Zeitschritt.....	151
7.2.5	Implizite Zeitintegration.....	152
7.2.6	Zusammenfassung Kriechbeispiel.....	158
7.2.7	Zusammenwirken mit anderen Materialnichtlinearitäten.....	158
7.3	Konsistente Tangente für implizites Kriechen.....	158
7.3.1	Herleitung.....	158
7.3.2	Beispiele.....	161
7.4	Allgemeine Form für lokale und globale Iteration.....	166
<b>8</b>	<b>Theorie und Numerik der Elasto-Plastizität .....</b>	<b>170</b>
8.1	Grundbegriffe eindimensionalen Verhaltens .....	170
8.2	Bausteine einer mehrdimensionalen Elasto-Plastizitätstheorie .....	172
8.3	Fließregeln .....	173
8.4	Kugeltensor und Deviator, Hauptspannungen und Hauptspannungsraum.....	174
8.5	Klassische Fließbedingungen.....	176
8.5.1	Gestaltänderungsenergie-Hypothese (nach von Mises).....	176
8.5.2	Schubspannungs-Hypothese (Tresca).....	178
8.5.3	Mohr-Coulomb-Bedingung .....	182
8.5.4	Drucker-Prager-Bedingung .....	184
8.6	Verfestigungsregeln.....	185
8.6.1	Einachsige Spannungs-Dehnungs-Beziehungen.....	185
8.6.2	Mehrdimensionales Verfestigungsverhalten.....	187
8.7	Erfüllung der Stoffgleichungen in der FEM, lokale Iteration .....	191
8.7.1	Allgemeine Darstellung.....	191
8.7.2	Beispiel lineare Verfestigung .....	194

8.8	Konsistente Tangente .....	196
8.8.1	Allgemeine Darstellung .....	196
8.8.2	Beispiel lineare Verfestigung .....	199
8.9	Tensor- und Vektorschreibweise, Tensor- und Ingenieurnotation .....	200
8.10	Beispielprogrammierung in USERPL von ANSYS .....	201
8.11	Modelle für kinematische Verfestigung .....	207
8.11.1	Besseling-Modell (Overlay-Modell).....	207
8.11.2	Armstrong-Frederik- bzw. Chaboche-Modell.....	212
8.12	Einspielen (Shakedown) und Ratcheting.....	214
8.12.1	Begriffe .....	214
8.12.2	Melan-Theorem .....	215
8.12.3	Struktur-Ratcheting.....	217
8.12.4	Material-Ratcheting .....	220
8.12.5	Thermisches Ratcheting.....	224
8.12.6	Numerisches Ratcheting bei Temperaturzyklen .....	226
 <b>Hauptabschnitt III: Kontakt</b>		
<b>9</b>	<b>Einführung in Kontaktberechnungen .....</b>	<b>228</b>
9.1	Was bedeutet Kontakt?.....	228
9.2	Modellierung von Kontakt .....	229
9.2.1	Punkt-zu-Punkt- bzw. Knoten-zu-Knoten-Kontakt.....	229
9.2.2	Knoten-zu-Oberfläche-Kontakt .....	230
9.2.3	Punkt-zu-Oberfläche-Kontakt.....	230
9.2.4	Oberfläche-zu-Oberfläche-Kontakt .....	231
<b>10</b>	<b>Erfüllung der Kontaktbedingung .....</b>	<b>232</b>
10.1	Direkte Einführung der Nebenbedingung.....	233
10.2	Penalty-Methode .....	234
10.3	Lagrange-Multiplikator-Methode.....	236
10.4	Finite-Elemente-Testproblem.....	237
10.4.1	Direkte Einführung der Nebenbedingung in das Gleichungssystem.....	238
10.4.2	Penalty-Verfahren .....	243
10.4.3	Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren.....	245
10.4.4	Perturbed-Lagrange-Methode .....	247
10.4.5	Augmented-Lagrange-Verfahren .....	249
10.5	Überbestimmtheit durch Kontakt (Overconstraining) .....	251
<b>11</b>	<b>Aspekte der Kontaktmodellierung .....</b>	<b>252</b>
11.1	Knoten-zu-Oberfläche-Kontakt.....	252
11.2	Punkt-zu-Oberfläche-Kontakt .....	254
11.2.1	Integrationspunkt-Kontakt .....	254
11.2.2	Knoten als Integrationspunkte .....	260

---

11.3 Konvergenz-Erzielung .....	261
11.3.1 Penalty-Verfahren.....	262
11.3.2 Lagrange-Verfahren und direkte Einbringung.....	266
11.3.3 Geeignete Vernetzung und Lastaufbringung .....	266
11.4 Systemmatrizen.....	267
<b>12 Kontakt-Kinematik .....</b>	<b>268</b>
<b>13 Kontaktfeststellung.....</b>	<b>271</b>
13.1 Suchstrategien .....	271
13.1.1 Bucket Sort .....	271
13.1.2 Pinball-Algorithmus .....	272
13.1.3 Topologie-Suche .....	275
13.2 Auswahl von Master- und Slave-Seite.....	275
13.3 Nahbereichs-Kontaktberechnungen .....	277
13.3.1 Ebene Flächen .....	277
13.3.2 Pseudoelement-Algorithmus .....	278
13.3.3 Normalensuche .....	279
13.4 Konkave Knicke und Ecken.....	282
<b>14 Reibung.....</b>	<b>284</b>
<b>15 Kontakt mit Schalen- und Balkenelementen.....</b>	<b>286</b>
15.1 Dickenberücksichtigung .....	286
15.2 Momente aus Exzentrizitäten.....	287
<b>Literaturhinweise .....</b>	<b>289</b>
<b>Stichwortverzeichnis.....</b>	<b>291</b>