

## ■ Rechnerorientierte Baumechanik

**Ernst & Sohn**

# Inhaltsverzeichnis

## Vorwort

## Verzeichnis der Verfasser

## Flächentragwerke

|        |                                                                                                              |     |
|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1      | Einleitung . . . . .                                                                                         | 1   |
| 2      | Scheiben . . . . .                                                                                           | 3   |
| 2.1    | Vorbemerkungen . . . . .                                                                                     | 3   |
| 2.2    | Der ebene Spannungszustand . . . . .                                                                         | 4   |
| 2.3    | Der ebene Verzerrungszustand . . . . .                                                                       | 6   |
| 2.4    | Die Verträglichkeitsbedingung . . . . .                                                                      | 8   |
| 2.5    | Die Airysche Spannungsfunktion . . . . .                                                                     | 9   |
| 2.6    | Der Verschiebungszustand . . . . .                                                                           | 10  |
| 2.7    | Die Randbedingungen . . . . .                                                                                | 11  |
| 2.8    | Die verallgemeinerten Navierschen Bewegungsgleichungen . . . . .                                             | 15  |
| 2.9    | Die strenge Lösung ausgewählter Scheibenprobleme . . . . .                                                   | 16  |
| 2.9.1  | Spannungsfunktion als Unbekannte . . . . .                                                                   | 16  |
| 2.9.2  | Verschiebungen als Unbekannte . . . . .                                                                      | 34  |
| 3      | Platten . . . . .                                                                                            | 45  |
| 3.1    | Vorbemerkungen . . . . .                                                                                     | 45  |
| 3.2    | Theorie der Schubstarren Platte . . . . .                                                                    | 46  |
| 3.2.1  | Lineare Theorie: Plattengleichung . . . . .                                                                  | 46  |
| 3.2.2  | Die Randbedingungen . . . . .                                                                                | 51  |
| 3.2.3  | Die strenge Lösung ausgewählter Plattenprobleme . . . . .                                                    | 53  |
| 3.2.4  | Geometrisch nichtlineare Theorie: Feldgleichungen . . . . .                                                  | 73  |
| 3.2.5  | Plattenbiegung bei Belastung sowohl normal als auch parallel zur<br>Plattenmittelebene . . . . .             | 77  |
| 3.2.6  | Stabilitätsverlust . . . . .                                                                                 | 80  |
| 3.3    | Lineare Theorie der Schubnachgiebigen Platte . . . . .                                                       | 82  |
| 4      | Schalen . . . . .                                                                                            | 89  |
| 4.1    | Vorbemerkungen . . . . .                                                                                     | 89  |
| 4.2    | Grundlagen der Flächentheorie . . . . .                                                                      | 91  |
| 4.3    | Konsistente erste Approximation einer allgemeinen linearen Theorie<br>dünner, Schubstarrer Schalen . . . . . | 98  |
| 4.4    | Die geometrischen Beziehungen . . . . .                                                                      | 100 |
| 4.5    | Die konstitutiven Beziehungen . . . . .                                                                      | 102 |
| 4.6    | Die Gleichgewichtsbedingungen . . . . .                                                                      | 106 |
| 4.7    | Die Randbedingungen . . . . .                                                                                | 108 |
| 4.8    | Die Theorie flacher Schalen . . . . .                                                                        | 108 |
| 4.9    | Die Membrantheorie . . . . .                                                                                 | 109 |
| 4.10   | Membrantheorie der Rotationsschalen . . . . .                                                                | 110 |
| 4.10.1 | Rotationsschalen . . . . .                                                                                   | 110 |
| 4.10.2 | Rotationssymmetrische Belastung . . . . .                                                                    | 111 |
| 4.10.3 | Allgemeine Belastung . . . . .                                                                               | 121 |

|        |                                                                                                                                 |     |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.11   | Biegetheorie der Rotationsschalen unter rotationssymmetrischer Belastung                                                        | 125 |
| 4.11.1 | Rotationsschalen unter rotationssymmetrischer Belastung                                                                         | 125 |
| 4.11.2 | Näherungsweise Integration der Differentialgleichungen der Biegetheorie für Kugelschalen unter rotationssymmetrischer Belastung | 126 |
| 5      | Literatur                                                                                                                       | 138 |

## Die Methode der Finiten Elemente

|       |                                                                             |     |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1     | Einleitung                                                                  | 141 |
| 2     | Entwicklungstendenzen                                                       | 142 |
| 2.1   | Historischer Abriß                                                          | 142 |
| 2.2   | Stand und weitere Entwicklung                                               | 143 |
| 3     | Darstellung der Methode und Rechengang                                      | 144 |
| 4     | Grundlagen                                                                  | 152 |
| 4.1   | Arbeit, Potential und Prinzip vom stationären Wert des Gesamtpotentials     | 153 |
| 4.2   | Prinzip der virtuellen Arbeiten (virtuellen Verrückungen)                   | 158 |
| 4.3   | Bereichsweise Ansätze: Finite-Element-Methode                               | 159 |
| 4.4   | Varianten der Methode                                                       | 161 |
| 5     | Elementformulierung                                                         | 165 |
| 5.1   | Eindimensionale Elemente                                                    | 165 |
| 5.2   | Scheibenelemente                                                            | 165 |
| 5.2.1 | Rechteckelement mit linearen Ansätzen                                       | 165 |
| 5.2.2 | Dreieckselemente                                                            | 171 |
| 5.2.3 | Höhere Ansätze                                                              | 173 |
| 5.2.4 | Isoparametrische Scheibenelemente                                           | 175 |
| 5.2.5 | Zur numerischen Integration                                                 | 178 |
| 5.3   | Plattenelemente                                                             | 180 |
| 5.3.1 | Viereckelement (Reissner-Mindlin-Theorie) mit reduzierter Integration (SRI) | 181 |
| 5.3.2 | Viereckelemente (Kirchhoff-Theorie)                                         | 187 |
| 5.3.3 | Dreieckselemente (Kirchhoff-Theorie)                                        | 190 |
| 5.4   | Schalenelemente                                                             | 194 |
| 5.4.1 | Facetten-Approximation der Geometrie                                        | 195 |
| 5.4.2 | Gekrümmte Elemente                                                          | 197 |
| 5.4.3 | „Degenerierte“ Schalenelemente                                              | 198 |
| 5.4.4 | Spezialelemente für Rotationsschalen                                        | 200 |
| 5.4.5 | Kontinuumselemente                                                          | 208 |
| 6     | Aufbau des Gesamtsystems                                                    | 210 |
| 6.1   | Transformation                                                              | 210 |
| 6.2   | Assemblierung                                                               | 211 |
| 6.3   | Randbedingungen                                                             | 213 |
| 7     | Lösung der Systemgleichungen                                                | 216 |
| 7.1   | Substrukturtechnik                                                          | 216 |
| 7.2   | Bandstruktur und Speichertechnik                                            | 219 |
| 7.3   | Lösungsalgorithmen für lineare Gleichungssysteme                            | 221 |
| 7.3.1 | Direkte Verfahren                                                           | 221 |
| 7.3.2 | Frontlöser                                                                  | 223 |
| 7.3.3 | Iterative Verfahren                                                         | 224 |
| 7.4   | Bandbreitenoptimierung                                                      | 226 |
| 8     | Nichtlineare Probleme                                                       | 227 |

|     |                                             |     |
|-----|---------------------------------------------|-----|
| 8.1 | Grundlagen, Formulierungen . . . . .        | 228 |
| 8.2 | Nichtlineare Lösungsverfahren . . . . .     | 233 |
| 8.3 | Stabilität . . . . .                        | 235 |
| 9   | Dynamik . . . . .                           | 239 |
| 9.1 | Grundlagen . . . . .                        | 239 |
| 9.2 | Methoden der direkten Integration . . . . . | 240 |
| 9.3 | Modale Verfahren . . . . .                  | 242 |
| 9.4 | Eigenwertanalyse . . . . .                  | 244 |
| 10  | Literatur . . . . .                         | 246 |

### Die Methode der Randelemente

|     |                                                   |     |
|-----|---------------------------------------------------|-----|
| 1   | Einleitung . . . . .                              | 249 |
| 1.1 | Der Satz von Betti . . . . .                      | 252 |
| 2   | Integraldarstellungen . . . . .                   | 257 |
| 3   | Scheibentragwerke und elastische Körper . . . . . | 263 |
| 3.1 | Die indirekte Methode . . . . .                   | 270 |
| 3.2 | Nichtlineare Probleme . . . . .                   | 272 |
| 4   | Platten . . . . .                                 | 273 |
| 4.1 | Elastische Bettung . . . . .                      | 278 |
| 5   | Dynamische Probleme . . . . .                     | 279 |
| 5.1 | Faltungsintegrale . . . . .                       | 280 |
| 5.2 | Wellenausbreitung . . . . .                       | 281 |
| 6   | Finite Elemente – Randelemente . . . . .          | 283 |
| 6.1 | Vergleich der beiden Methoden . . . . .           | 283 |
| 6.2 | Kopplung der beiden Methoden . . . . .            | 286 |
| 7   | Literatur . . . . .                               | 288 |
| 7.1 | Bibliographie . . . . .                           | 290 |

### Anwendung der Finite Elemente Methode im Stahlbetonbau

|       |                                                                        |     |
|-------|------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1     | Einführung . . . . .                                                   | 293 |
| 1.1   | Allgemeine Betrachtungen . . . . .                                     | 293 |
| 1.2   | Grundlagen der FEM . . . . .                                           | 294 |
| 1.3   | Idealisierung von Stahlbetonstrukturen durch Finite Elemente . . . . . | 297 |
| 2     | Bewehrung . . . . .                                                    | 298 |
| 2.1   | Experimentelle Ergebnisse . . . . .                                    | 298 |
| 2.2   | Modellierung des einaxialen Verhaltens . . . . .                       | 299 |
| 2.3   | Modellierung der Bewehrung für Finite Elemente Berechnungen . . . . .  | 302 |
| 3     | Beton . . . . .                                                        | 303 |
| 3.1   | Einleitung . . . . .                                                   | 303 |
| 3.2   | Experimentelle Ergebnisse . . . . .                                    | 304 |
| 3.2.1 | Einaxiales Verhalten . . . . .                                         | 304 |
| 3.2.2 | Zweiaxiales Verhalten . . . . .                                        | 307 |
| 3.2.3 | Dreiaxiales Verhalten . . . . .                                        | 312 |
| 3.3   | Versagenstheorien . . . . .                                            | 313 |
| 3.3.1 | Geometrische Beschreibung der Bruchumhüllenden . . . . .               | 313 |
| 3.3.2 | Ein-Parameter-Modelle . . . . .                                        | 315 |

|         |                                                                                                                   |     |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.3.2.1 | Versagenstheorie nach Rankine . . . . .                                                                           | 315 |
| 3.3.2.2 | Fließbedingungen nach Tresca und von Mises . . . . .                                                              | 317 |
| 3.3.3   | Zwei-Parameter-Modelle . . . . .                                                                                  | 318 |
| 3.3.3.1 | Fließbedingung nach Mohr-Coulomb . . . . .                                                                        | 318 |
| 3.3.3.2 | Fließbedingungen nach Drucker-Prager . . . . .                                                                    | 320 |
| 3.3.4   | Modelle mit drei bis fünf Parametern . . . . .                                                                    | 322 |
| 3.4     | Werkstoffmodelle . . . . .                                                                                        | 322 |
| 3.4.1   | Allgemeines . . . . .                                                                                             | 322 |
| 3.4.2   | Nichtlinear elastische Werkstoffmodelle . . . . .                                                                 | 322 |
| 3.4.2.1 | Klassifizierung der Modelle . . . . .                                                                             | 322 |
| 3.4.2.2 | Isotropes Modell für Beton unter zweiaxialer Druckbelastung . . . . .                                             | 323 |
| 3.4.2.3 | Orthotropes Modell für Beton unter zweiaxialer Druckbelastung . . . . .                                           | 326 |
| 3.4.3   | Plastizitätsmodelle . . . . .                                                                                     | 328 |
| 3.4.3.1 | Grundlagen der Plastizitätstheorie . . . . .                                                                      | 328 |
| 3.4.3.2 | Elastisch-plastisches Modell für Beton unter zweiaxialer Druckbelastung . . . . .                                 | 332 |
| 3.4.4   | Anwendung der Werkstoffmodelle zur wirklichkeitsnahen Beschreibung<br>des Materialverhaltens des Betons . . . . . | 335 |
| 4       | Verbund zwischen Bewehrung und Beton . . . . .                                                                    | 337 |
| 4.1     | Verbundspannungs-Relativverschiebungs-Beziehungen . . . . .                                                       | 337 |
| 4.2     | Finite Elemente für Verbundberechnungen . . . . .                                                                 | 339 |
| 4.2.1   | Bond-Link-Element . . . . .                                                                                       | 339 |
| 4.2.2   | Isoparametrische Verbundelemente . . . . .                                                                        | 342 |
| 4.2.3   | Energievergleich zwischen Bond-Link-Element und isoparametrischen<br>Verbundelementen . . . . .                   | 348 |
| 5       | Kraftübertragung über Risse . . . . .                                                                             | 350 |
| 5.1     | Einleitung . . . . .                                                                                              | 350 |
| 5.2     | Übertragungsmechanismen . . . . .                                                                                 | 352 |
| 5.2.1   | Verzahnungswirkung der Rißufer . . . . .                                                                          | 352 |
| 5.2.2   | Verdübelungswirkung der Bewehrung . . . . .                                                                       | 354 |
| 5.3     | Schubtragverhalten bewehrter Risse . . . . .                                                                      | 355 |
| 5.4     | Steifigkeitsmatrizen für diskrete Risse . . . . .                                                                 | 357 |
| 5.4.1   | Mechanisches Ersatzmodell . . . . .                                                                               | 357 |
| 5.4.2   | Rißsteifigkeitsmatrix für unbewehrte Risse . . . . .                                                              | 358 |
| 5.4.2.1 | Risse unter reiner Schubbeanspruchung . . . . .                                                                   | 358 |
| 5.4.2.2 | Risse bei Beanspruchung durch Schub- und Normalspannung . . . . .                                                 | 359 |
| 5.4.3   | Rißsteifigkeitsmatrix für bewehrte Risse . . . . .                                                                | 360 |
| 5.5     | Schubsteifigkeit bei verschmierter Rißbildung . . . . .                                                           | 361 |
| 6       | Berechnung von Stahlbetonflächentragwerken . . . . .                                                              | 365 |
| 6.1     | Einleitung . . . . .                                                                                              | 365 |
| 6.2     | Materialverhalten des Verbundwerkstoffes Stahlbeton . . . . .                                                     | 366 |
| 6.2.1   | Ungerissener Beton und Erfassung der Rißbildung . . . . .                                                         | 366 |
| 6.2.2   | Gerissener Beton . . . . .                                                                                        | 367 |
| 6.2.2.1 | Mitwirkung des Betons nach der Rißbildung . . . . .                                                               | 367 |
| 6.2.2.2 | Abminderung der Betondruckfestigkeit infolge gleichzeitig auftretender<br>Querzugbeanspruchung . . . . .          | 370 |
| 6.2.2.3 | Änderung der Hauptdehnungsrichtung . . . . .                                                                      | 372 |
| 6.3     | Berechnung von Stahlbetonscheiben . . . . .                                                                       | 372 |
| 6.3.1   | Gleichgewichtsbedingungen für ein Scheibenelement mit Rissen . . . . .                                            | 372 |
| 6.3.2   | Iterativer Algorithmus zur Bestimmung des Spannungszustandes<br>in einem Scheibenelement . . . . .                | 375 |

|         |                                                                                                                       |     |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.3.3   | Berechnung einer schubbeanspruchten Stahlbetonscheibe . . . . .                                                       | 377 |
| 6.4     | Berechnung von Stahlbetonplatten und Stahlbetonschalen . . . . .                                                      | 380 |
| 6.4.1   | Geschichtetes Flächentragwerkselement . . . . .                                                                       | 380 |
| 6.4.1.1 | Betonschichten . . . . .                                                                                              | 384 |
| 6.4.1.2 | Stahlschichten . . . . .                                                                                              | 385 |
| 6.4.2   | Iterativer Algorithmus zur Berechnung von Flächentragwerkselementen . . . . .                                         | 386 |
| 6.4.3   | Berechnung von Platten unter Drillmomentenbeanspruchungen . . . . .                                                   | 387 |
| 6.4.4   | Berechnung eines Flächentragwerkselements unter kombinierter<br>Normalkraft- und Biegemomentenbeanspruchung . . . . . | 392 |
| 7       | Ausgewählte Beispiele zur Anwendung der FEM im Stahlbetonbau . . . . .                                                | 392 |
| 7.1     | Endverankerung mit Haken . . . . .                                                                                    | 392 |
| 7.2     | Verankerungsbereich von Spannbeton-Hohlplatten . . . . .                                                              | 395 |
| 7.2.1   | Einleitung . . . . .                                                                                                  | 395 |
| 7.2.2   | Zweidimensionale FE-Berechnung . . . . .                                                                              | 395 |
| 7.2.3   | Dreidimensionale FE-Berechnung . . . . .                                                                              | 399 |
| 7.3     | Berechnung einer freigeformten Modellschale aus Stahlbeton . . . . .                                                  | 401 |
| 7.3.1   | Formfindung . . . . .                                                                                                 | 401 |
| 7.3.2   | Numerische Untersuchungen . . . . .                                                                                   | 402 |
| 8       | Bezeichnungen . . . . .                                                                                               | 406 |
| 8.1     | Formelzeichen . . . . .                                                                                               | 406 |
| 8.2     | Indizes bzw. Kopfzeiger . . . . .                                                                                     | 407 |
| 9       | Anhang . . . . .                                                                                                      | 408 |
| 10      | Literatur . . . . .                                                                                                   | 423 |

## Numerische Probleme bei nichtlinearem Tragwerksverhalten

|       |                                                                    |     |
|-------|--------------------------------------------------------------------|-----|
| 1     | Einleitung . . . . .                                               | 427 |
| 2     | Geometrisch nichtlineares Verhalten . . . . .                      | 428 |
| 2.1   | Einfache Stabmodelle . . . . .                                     | 429 |
| 2.2   | Spannungs- und Verzerrungsdefinitionen für Kontinua . . . . .      | 437 |
| 2.3   | Geometrisch nichtlineare Analyse von Kontinua . . . . .            | 439 |
| 2.4   | Finite Elemente und numerische Quadratur . . . . .                 | 442 |
| 2.5   | Berechnung der Knicklast als lineares Eigenwertproblem . . . . .   | 444 |
| 3     | Physikalisch nichtlineares Verhalten . . . . .                     | 445 |
| 3.1   | Nichtlineare Elastizität . . . . .                                 | 446 |
| 3.2   | Plastizität . . . . .                                              | 448 |
| 3.2.1 | Grundlagen der Theorie . . . . .                                   | 449 |
| 3.2.2 | Plastizität von Stahl . . . . .                                    | 454 |
| 3.2.3 | Plastizität von Sand, Ton, Fels und Beton . . . . .                | 456 |
| 3.3   | Rißbildung . . . . .                                               | 458 |
| 3.3.1 | Das verschmierte Rißkonzept . . . . .                              | 459 |
| 3.3.2 | Bewehrung und Tension-stiffening . . . . .                         | 460 |
| 3.3.3 | Fortgeschrittene verschmierte Rißmodelle . . . . .                 | 462 |
| 4     | Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme . . . . .               | 463 |
| 4.1   | Inkrementelle, iterative und kombinierte Lösungsmethoden . . . . . | 463 |
| 4.2   | Kraft- und verschiebungsgesteuerte Verfahren . . . . .             | 466 |
| 4.3   | Methode der konstanten Bogenlänge . . . . .                        | 468 |
| 4.4   | Newton-Raphson- und BFGS-Verfahren . . . . .                       | 470 |

|     |                                                                 |     |
|-----|-----------------------------------------------------------------|-----|
| 4.5 | Vergleichende Bemerkungen . . . . .                             | 472 |
| 4.6 | Konvergenzkriterien . . . . .                                   | 474 |
| 5   | Praktische Durchführung nichtlinearer Berechnungen . . . . .    | 475 |
| 5.1 | Allgemeine Voraussetzungen . . . . .                            | 475 |
| 5.2 | Erstellung von mathematischen Modellen von Strukturen . . . . . | 476 |
| 5.3 | Vorarbeiten . . . . .                                           | 478 |
| 5.4 | Überprüfung der Ergebnisse . . . . .                            | 480 |
| 5.5 | Beispiel . . . . .                                              | 482 |
| 6   | Literatur . . . . .                                             | 487 |

|                                       |            |
|---------------------------------------|------------|
| <b>Stichwortverzeichnis . . . . .</b> | <b>489</b> |
|---------------------------------------|------------|