

Arnfried Kemnitz

Mathematik zum Studienbeginn

**Grundlagenwissen für alle technischen,
mathematisch-naturwissenschaftlichen und
wirtschaftswissenschaftlichen Studiengänge**

4., durchgesehene Auflage

Inhaltsverzeichnis

1	Arithmetik	1
1.1	Mengen	1
1.2	Aussageformen und logische Zeichen	2
1.2.1	Aussageformen	2
1.2.2	Logische Zeichen	2
1.2.3	Vollständige Induktion	3
1.3	Einteilung der Zahlen	4
1.4	Grundrechenarten	6
1.5	Grundlegende Rechenregeln	7
1.5.1	Buchstabenrechnen	7
1.5.2	Kehrwert, Quersumme	7
1.5.3	Teilbarkeitsregeln	7
1.5.4	Punktrechnung vor Strichrechnung	8
1.5.5	Potenzrechnung vor Punktrechnung	8
1.5.6	Grundgesetze der Addition und Multiplikation	9
1.5.7	Grundregeln der Klammerrechnung	9
1.5.8	Multiplikation mit Klammern	10
1.5.9	Indizes, Summenzeichen, Produktzeichen	11
1.5.10	Binomische Formeln	12
1.5.11	Division mit Klammern	13
1.6	Bruchrechnung	13
1.6.1	Definitionen	13
1.6.2	Erweitern und Kürzen	14
1.6.3	Addieren und Subtrahieren gleichnamiger Brüche	15
1.6.4	Addieren und Subtrahieren ungleichnamiger Brüche	15
1.6.5	Multiplizieren von Brüchen	16
1.6.6	Dividieren von Brüchen	17
1.7	Potenz- und Wurzelrechnung	17
1.7.1	Definition der Potenz	17
1.7.2	Regeln der Potenzrechnung	18
1.7.3	Definition der Wurzel	21
1.7.4	Regeln der Wurzelrechnung	22
1.8	Dezimalzahlen und Dualzahlen	26
1.8.1	Dezimalsystem	26
1.8.2	Dualsystem	27
1.8.3	Runden	28
1.9	Logarithmen	28
1.9.1	Definition des Logarithmus	28
1.9.2	Spezielle Basen	29
1.9.3	Regeln der Logarithmenrechnung	30
1.9.4	Zusammenhang von Logarithmen mit verschiedenen Basen	31
1.9.5	Dekadische Logarithmen	32
1.10	Mittelwerte	32

1.10.1	Arithmetisches Mittel	32
1.10.2	Geometrisches Mittel	32
1.10.3	Harmonisches Mittel	33
1.10.4	Quadratisches Mittel	33
1.11	Ungleichungen	34
1.11.1	Definitionen und Rechenregeln	34
1.11.2	Absolutbetrag	35
1.11.3	Intervalle	36
1.12	Komplexe Zahlen	37
1.12.1	Algebraische Form	37
1.12.2	Trigonometrische Form	39
1.12.3	Addieren und Subtrahieren komplexer Zahlen	40
1.12.4	Multiplizieren komplexer Zahlen	41
1.12.5	Dividieren komplexer Zahlen	42
1.12.6	Potenzieren komplexer Zahlen	43
1.12.7	Radizieren komplexer Zahlen	44
1.12.8	Eulersche Formel	46
	Gleichungen	48
2.1	Gleichungsarten	48
2.2	Äquivalente Umformungen	50
2.3	Lineare Gleichungen	52
2.4	Proportionen	53
2.5	Quadratische Gleichungen	54
2.5.1	Definitionen	54
2.5.2	Lösungsverfahren	55
2.5.3	Satz von Vieta für quadratische Gleichungen	60
2.6	Algebraische Gleichungen höheren Grades	60
2.6.1	Kubische Gleichungen	60
2.6.2	Polynomdivision	62
2.6.3	Gleichungen vierten Grades	64
2.6.4	Gleichungen n-ten Grades	67
2.6.5	Satz von Vieta für Gleichungen n-ten Grades	68
2.7	Auf algebraische Gleichungen zurückführbare Gleichungen	70
2.7.1	Bruchgleichungen	70
2.7.2	Wurzelgleichungen	71
2.8	Transzendente Gleichungen	73
2.8.1	Exponentialgleichungen	73
2.8.2	Logarithmische Gleichungen	74
2.8.3	Trigonometrische Gleichungen	75
2.9	Lineare Gleichungssysteme	76
2.9.1	Definitionen	76
2.9.2	Zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen	76
2.9.3	Drei lineare Gleichungen mit drei Variablen	80
2.9.4	Matrizen und Determinanten	81
2.10	Lineare Ungleichungen	92
2.10.1	Definitionen	92
2.10.2	Lineare Ungleichungen mit einer Variablen	93

2.10.3	Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen	94
2.10.4	Lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen	96
Planimetrie		98
3.1	Geraden und Strecken	98
3.2	Winkel	99
3.3	Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal	103
3.4	Projektion	106
3.5	Geometrische Örter	107
3.6	Dreiecke	107
3.6.1	Allgemeine Dreiecke	107
3.6.2	Gleichschenklige Dreiecke	109
3.6.3	Gleichseitige Dreiecke	110
3.6.4	Rechtwinklige Dreiecke	111
3.6.5	Besondere Geraden, Strecken und Kreise	111
3.6.6	Flächensätze im rechtwinkligen Dreieck	115
3.6.7	Kongruenz von Dreiecken	118
3.6.8	Grundkonstruktionen des Dreiecks	120
3.7	Vierecke	123
3.7.1	Allgemeine Vierecke	123
3.7.2	Trapeze	125
3.7.3	Parallelogramme	125
3.7.4	Rhomben	126
3.7.5	Rechtecke	127
3.7.6	Quadrate	127
3.7.7	Drachen	128
3.7.8	Sehnenvierecke	129
3.7.9	Tangentenvierecke	130
3.8	Reguläre n-Ecke	130
3.9	Polygone	132
3.10	Kreise	134
3.10.1	Definitionen	134
3.10.2	Kreissectoren	135
3.10.3	Kreissegmente	136
3.10.4	Kreise und Geraden	137
3.10.5	Winkelsätze am Kreis	138
3.10.6	Eigenschaften von Sekanten und Sehnen	139
3.10.7	Tangentenkonstruktionen	139
3.10.8	Sätze über Sehnen, Sekanten, Tangenten	141
3.10.9	Bogenmaß	143
3.11	Symmetrie	144
3.11.1	Punktsymmetrie	144
3.11.2	Achsensymmetrie	144
3.12	Ähnlichkeit	144
3.12.1	Zentrische Streckung	144
3.12.2	Strahlensätze	145
3.12.3	Ähnliche Figuren	147
3.12.4	Streckenteilungen	148

4	Stereometrie	152
4.1	Prismen	152
4.1.1	Allgemeine Prismen	152
4.1.2	Parallelepiped und Würfel	153
4.2	Zylinder	154
4.2.1	Allgemeine Zylinder	154
4.2.2	Gerade Kreiszylinder	155
4.2.3	Hohlzylinder	156
4.3	Pyramiden	157
4.3.1	Allgemeine Pyramiden	157
4.3.2	Gerade quadratische Pyramiden	158
4.4	Kegel	159
4.4.1	Allgemeine Kegel	159
4.4.2	Gerade Kreiskegel	160
4.5	Cavalierisches Prinzip	161
4.6	Pyramidenstümpfe und Kegelsegmente	161
4.6.1	Pyramidenstümpfe	161
4.6.2	Kegelsegmente	162
4.7	Platonische Körper	163
4.8	Kugeln	166
4.8.1	Definitionen	166
4.8.2	Kugelsegmente	167
4.8.3	Kugelsektoren	168
4.8.4	Kugelschichten	168
5	Funktionen	170
5.1	Definition und Darstellungen von Funktionen	170
5.1.1	Definitionen	170
5.1.2	Funktionsgleichung	171
5.1.3	Graph einer Funktion	172
5.1.4	Wertetabelle einer Funktion	173
5.2	Verhalten von Funktionen	173
5.2.1	Monotone Funktionen	173
5.2.2	Symmetrische Funktionen	175
5.2.3	Beschränkte Funktionen	177
5.2.4	Injektive Funktionen	177
5.2.5	Surjektive Funktionen	178
5.2.6	Bijektive Funktionen	179
5.2.7	Periodische Funktionen	179
5.2.8	Umkehrfunktionen	179
5.2.9	Reelle und komplexe Funktionen	181
5.3	Einteilung der elementaren Funktionen	182
5.4	Ganze rationale Funktionen	185
5.4.1	Konstante Funktionen	185
5.4.2	Lineare Funktionen	186
5.4.3	Quadratische Funktionen	190
5.4.4	Kubische Funktionen	198
5.4.5	Ganze rationale Funktionen n-ten Grades	199

5.4.6	Horner-Schema	202
5.5	Gebrochene rationale Funktionen	203
5.5.1	Nullstellen, Pole, Asymptoten	203
5.5.2	Partialbruchzerlegung	210
" 5.6	Irrationale Funktionen	213
5.7	Transzendente Funktionen	216
5.7.1	Exponentialfunktionen	216
5.7.2	Logarithmusfunktionen	217
Trigonometrie		220
6.1	Definition der trigonometrischen Funktionen	220
6.2	Trigonometrische Funktionen für beliebige Winkel	223
6.3	Beziehungen für den gleichen Winkel	225
6.4	Graphen der trigonometrischen Funktionen	226
6.5	Reduktionsformeln	228
6.6	Additionstheoreme	229
6.7	Sinussatz und Kosinussatz	232
6.8	Grundaufgaben der Dreiecksberechnung	233
6.9	Arkusfunktionen	237
Analytische Geometrie		241
7.1	Koordinatensysteme	241
7.1.1	Kartesisches Koordinatensystem der Ebene	241
7.1.2	Polarkoordinatensystem der Ebene	242
7.1.3	Zusammenhang zwischen kartesischen und Polarkoordinaten	243
7.1.4	Kartesisches Koordinatensystem des Raums	245
7.1.5	Kugelkoordinatensystem des Raums	246
7.1.6	Zylinderkoordinatensystem des Raums	247
7.2	Geraden	248
7.2.1	Geradengleichungen	248
7.2.2	Abstände	254
7.3	Kreise	255
7.3.1	Kreisgleichungen	255
7.3.2	Berechnung von Kreisen	258
7.3.3	Kreis und Gerade	259
7.4	Kugeln	264
7.5	Kegelschnitte	265
7.5.1	Ellipsen	267
7.5.2	Hyperbeln	271
7.5.3	Parabeln	276
7.5.4	Anwendungen	280
7.6	Graphisches Lösen von Gleichungen	285
7.7	Vektoren	290
7.7.1	Definitionen	290
7.7.2	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	290
7.7.3	Addition und Subtraktion zweier Vektoren	291
7.7.4	Komponentendarstellung von Vektoren in der Ebene	292
7.7.5	Komponentendarstellung von Vektoren im Raum	293
7.7.6	Skalarprodukt	295

7.7.7	Vektorprodukt	296
7.7.8	Spatprodukt	298
Differential- und Integralrechnung		300
8.1	Folgen	300
8.1.1	Grundbegriffe.	300
8.1.2	Arithmetische Folgen.	301
8.1.3	Geometrische Folgen.	302
8.1.4	Grenzwert einer Folge.	302
8.1.5	Tabelle einiger Grenzwerte.	303
8.1.6	Divergente Folgen.	304
8.2	Reihen.	305
8.2.1	Definitionen.	305
8.2.2	Arithmetische Reihen.	308
8.2.3	Geometrische Reihen.	308
8.2.4	Harmonische Reihen.	309
8.2.5	Alternierende Reihen.	310
8.3	Grenzwerte von Funktionen.	311
8.3.1	Grenzwert an einer endlichen Stelle.	311
8.3.2	Einseitige Grenzwerte.	312
8.3.3	Grenzwert im Unendlichen.	313
8.3.4	Rechenregeln für Grenzwerte.	314
8.3.5	Unbestimmte Ausdrücke.	314
8.3.6	Stetigkeit einer Funktion.	315
8.3.7	Unstetigkeitsstellen.	316
8.4	Ableitung einer Funktion.	318
8.4.1	Definitionen.	318
8.4.2	Differentiationsregeln.	320
8.4.3	Höhere Ableitungen.	323
8.4.4	Ableitungen einiger algebraischer Funktionen.	324
8.4.5	Ableitungen einiger transzendenter Funktionen.	324
8.4.6	Sekanten und Tangenten.	328
8.4.7	Extremwerte von Funktionen.	329
8.4.8	Krümmungsverhalten von Funktionen.	330
8.4.9	Wendepunkte von Funktionen.	332
8.4.10	Kurvendiskussion.	333
8.4.11	Anwendungsbeispiele.	334
8.4.12	Näherungsverfahren zur Nullstellenbestimmung.	336
8.5	Integralrechnung.	338
8.5.1	Unbestimmtes Integral.	338
8.5.2	Integrationsregeln.	339
8.5.3	Unbestimmte Integrale einiger algebraischer Funktionen.	343
8.5.4	Unbestimmte Integrale einiger transzendenter Funktionen.	344
8.5.5	Bestimmtes Integral.	345
8.5.6	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.	347
8.5.7	Eigenschaften des bestimmten Integrals.	347
8.5.8	Einige Anwendungen der Integralrechnung.	349
8.6	Funktionenreihen.	354

8.6.1	Definitionen	354
8.6.2	Potenzreihen	356
8.6.3	Fourier-Reihen	359
9	Kombinatorik	366
9.1	Kombinatorische Grundprinzipien	366
9.2	Fakultäten, Binomialkoeffizienten und Pascalsches Dreieck	368
9.3	Binomischer Lehrsatz	370
9.4	Permutationen und Variationen	371
9.5	Kombinationen	373
9.6	Permutationen mit eingeschränkter Wiederholung	376
9.7	Multinomialsatz	377
9.8	Prinzip der Inklusion und Exklusion	378
10	Wahrscheinlichkeitsrechnung	381
10.1	Zufällige Ereignisse	381
10.2	Absolute und relative Häufigkeit von Ereignissen	383
10.3	Stichproben	384
10.4	Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit	390
10.5	Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit	392
10.6	Zufallsvariable	397
A	Symbole und Bezeichnungsweisen	400
B	Mathematische Konstanten	404
C	Das griechische Alphabet	405
	Literaturverzeichnis	407
	Sachwortverzeichnis	408