dandelon.com
© 2008 AGI-Information Management Consultants
May be used for personal purposes only or by
libraries associated to dandelon.com network.

Fredi Tröltzsch

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Theorie, Verfahren und Anwendungen

vieweg

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Beispiele 1
1.1 Was ist optimale Steuerung? . . . 1
1.2 Beispiele konvexer Aufgaben . . . 2
1.2.1 Optimale stationäre Aufheizung . . . 2
1.2.2 Optimale instationäre Randtemperatur . . . 4
1.2.3 Optimales Schwingen . . . 5
1.3 Beispiele nichtkonvexer Probleme . . . 6
1.3.1 Aufgaben mit semilinearer elliptischer Gleichung . . . 6
1.3.2 Probleme mit semilinearer parabolischer Gleichung . . . 7
1.4 Grundkonzepte im endlichdimensionalen Fall . . . 8
1.4.1 Endlichdimensionale Aufgabe der optimalen Steuerung . . . 8
1.4.2 Existenz optimaler Steuerungen . . . 9
1.4.3 Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung . . . 10
1.4.4 Adjungierter Zustand . . . 11
1.4.5 Lagrange-Funktion . . . 13
1.4.6 Diskussion der Variationsungleichung . . . 14
1.4.7 Formulierung als Karush-Kuhn-Tucker-System . . . 14

2 Linear-quadratische elliptische Probleme 17
2.1 Lineare normierte Räume . . . 17
2.2 Sobolewräume . . . 19
2.2.1 L^p-Räume . . . 19
2.2.2 Reguläre Gebiete . . . 21
2.2.3 Schwache Ableitungen und Sobolewräume . . . 21
2.3 Schwache Lösungen elliptischer Gleichungen . . . 24
2.3.1 Poissongleichung . . . 25
2.3.2 Randbedingung dritter Art . . . 27
2.3.3 Differentialoperator in Divergenzform . . . 30
2.4 Lineare Abbildungen . . . 32
2.4.1 Lineare stetige Operatoren und Funktionale . . . 32
2.4.2 Schwache Konvergenz . . . 35
2.5 Existenz optimaler Steuerungen . . . 37
2.5.1 Optimale stationäre Temperaturquelle . . . 38
2.5.2 Optimale stationäre Randtemperatur . . . 42
2.5.3 Allgemeinere elliptische Gleichungen und Zielfunktionale * . . . 43
2.6 Differenzierbarkeit in Banachräumen . . . 44
2.7 Adjungierte Operatoren . . . 47
2.8 Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung . . . 49

2.8.1 Quadratische Optimierungsaufgabe im Hilbertraum . . . 49
2.8.2 Optimale stationäre Temperaturquelle . . . 51
2.8.3 Stationäre Temperaturquelle und Randbedingung dritter Art . . . 59
2.8.4 Optimale stationäre Randtemperatur . . . 60
2.8.5 Ein lineares Optimalsteuerungsproblem . . . 63
2.9 Konstruktion von Testaufgaben . . . 64
2.9.1 Bang-Bang-Steuerung . . . 64
2.9.2 Verteilte Steuerung und Neumann-Randbedingung . . . 65
2.10 Das formale Lagrange-Prinzip . . . 67
2.11 Weitere Beispiele * . . . 71
2.11.1 Differentialoperator in Divergenzform . . . 71
2.11.2 Optimale stationäre Temperaturquelle mit vorgegebener Außentemperatur . . . 72
2.12 Numerische Verfahren . . . 72
2.12.1 Bedingtes Gradientenverfahren . . . 73
2.12.2 Gradienten-Projektionsverfahren . . . 76
2.12.3 Überführung in ein endlichdimensionales quadratisches Optimierungsproblem . . . 76
2.12.4 Aktive-Mengen-Strategie . . . 81
2.13 Adjungierter Zustand als Multiplikator * . . . 84
2.13.1 Elliptische Gleichungen mit Daten aus V^* . . . 84
2.13.2 Anwendung beim Beweis von Optimalitätsbedingungen . . . 85
2.13.3 Adjungierter Zustand als Lagrangescher Multiplikator . . . 86
2.14 Höhere Regularität für elliptische Aufgaben * . . . 87
2.14.1 Grenzendes Zustandsraums if^1(fi) . . . 87
2.14.2 Sobolew-Slobodezki-Räume . . . 88
2.14.3 Höhere Regularität von Lösungen . . . 89
2.14.4 Einbettungssätze . . . 90
2.15 Regularität optimaler Steuerungen * . . . 91
2.16 Übungsaufgaben . . . 92

Linear-quadratische parabolische Probleme 95
3.1 Vorbetrachtungen . . . 95
3.2 Der örtlich eindimensionale Fall . . . 98
3.2.1 Eindimensionale Modellprobleme . . . 98
3.2.2 Integraldarstellung von Lösungen - Greensche Funktion . . . 100
3.2.3 Notwendige Optimalitätsbedingungen . . . 101
3.2.4 Bang-Bang-Prinzip . . . 106
3.3 Schwache Lösungen in W_2^{1l0}(<5) . . . 109
3.4 Schwache Lösungen in W(0,T) . . . 113
3.4.1 Abstrakte Funktionen . . . 113
3.4.2 Abstrakte Funktionen und parabolische Gleichungen . . . 115
3.4.3 Vektorwertige Distributionen . . . 116
3.4.4 Zugehörigkeit schwacher Lösungen aus $W_2'(Q)$ zu $W(0,T)$ . . . 119
3.5 Parabolische Optimalsteuerungsprobleme . . . 123
3.5.1 Optimale instationäre Randtemperatur . . . 123
3.5.2 Optimale instationäre Temperaturquelle . . . 124
3.6 Notwendige Optimalitätsbedingungen . . . 125

3.6.1 Hilfssatz für adjungierte Operatoren . . . 125
3.6.2 Optimale instationäre Randtemperatur . . . 127
3.6.3 Optimale instationäre Temperaturquelle . . . 130
3.6.4 Differentialoperator in Divergenzform * . . . 131
3.7 Numerische Lösungstechniken . . . 134
3.7.1 Gradienten-Projektionsverfahren . . . 134
3.7.2 Überführung in eine endlichdimensionale Aufgabe . . . 135
3.8 Parabolische Gleichungen in $L^2(0,T;V^*)$ * . . . 138
3.9 Übungsaufgaben . . . 139

Steuerung semilinearer elliptischer Gleichungen 141
4.1 Die semilineare elliptische Modellgleichung . . . 141
4.1.1 Motivation des weiteren Vorgehens . . . 141
4.1.2 Lösungen in H^1^) . . . 142
4.1.3 Stetige Lösungen . . . 144
4.2 Nemyzki-Operatoren . . . 147
4.2.1 Stetigkeit von Nemyzki-Operatoren . . . 147
4.2.2 Differenzierbarkeit von Nemyzki-Operatoren . . . 149
4.2.3 Ableitungen in weiteren L^p-Räumen * . . . 153
4.3 Existenz optimaler Steuerungen . . . 154
4.3.1 Grundvoraussetzung des Kapitels . . . 154
4.3.2 Verteilte Steuerung . . . 155
4.4 Der Steuerungs-Zustands-Operator . . . 158
4.4.1 Verteilte Steuerung . . . 159
4.4.2 Randsteuerung . . . 161
4.5 Notwendige Optimalitätsbedingungen . . . 161
4.5.1 Verteilte Steuerung . . . 161
4.5.2 Randsteuerung . . . 164
4.6 Anwendung des formalen Lagrange-Prinzips . . . 166
4.7 Pontrjaginsches Maximumprinzip * . . . 169
4.7.1 Hamilton-Funktionen . . . 169
4.7.2 Maximumprinzip . . . 170
4.8 Ableitungen zweiter Ordnung . . . 171
4.9 Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung . . . 175
4.9.1 Einführung - Die Zwei-Norm-Diskrepanz . . . 175
4.9.2 Verteilte Steuerung . . . 179
4.9.3 Randsteuerung . . . 187
4.9.4 Berücksichtigung stark aktiver Restriktionen * . . . 188
4.9.5 Fälle ohne Zwei-Norm-Diskrepanz . . . 192
4.9.6 Lokale Optimalität in 1/(0) * . . . 193
4.10 Numerische Verfahren . . . 194
4.10.1 Gradienten-Projektionsverfahren . . . 194
4.10.2 Grundidee des SQP-Verfahrens . . . 195
4.10.3 SQP-Verfahren für elliptische Probleme . . . 197
4.11 Übungsaufgaben . . . 200

5 Steuerung semilinearer parabolischer Gleichungen 201
5.1 Die semilineare parabolische Modellgleichung . . . 201
5.2 Grundvoraussetzung des Kapitels . . . 204
5.3 Existenz optimaler Steuerungen . . . 205
5.4 Steuerungs-Zustands-Operator . . . 207
5.5 Notwendige Optimalitätsbedingungen . . . 211
5.5.1 Verteilte Steuerung . . . 211
5.5.2 Randsteuerung . . . 214
5.6 Pontrjaginsches Maximumprinzip * . . . 216
5.7 Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung . . . 217
5.7.1 Ableitungen zweiter Ordnung . . . 217
5.7.2 Verteilte Steuerung . . . 219
5.7.3 Randsteuerung . . . 224
5.7.4 Ein Fall ohne Zwei-Norm-Diskrepanz . . . 225
5.8 Testaufgaben . . . 226
5.8.1 Aufgabe mit Steuerungsrestriktionen . . . 226
5.8.2 Aufgabe mit integraler Zustandsrestriktion * . . . 228
5.9 Numerische Verfahren . . . 233
5.9.1 Gradientenverfahren . . . 233
5.9.2 SQP-Verfahren . . . 234
5.10 Weitere parabolische Probleme * . . . 237
5.10.1 Phasenfeldmodell . . . 237
5.10.2 Instationäre Navier-Stokes-Gleichungen . . . 239
5.11 Übungsaufgaben . . . 243

6 Optimierungsaufgaben im Banachraum 244
6.1 Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen . . . 244
6.1.1 Konvexe Aufgaben . . . 244
6.1.2 Nichtkonvexe differenzierbare Aufgaben . . . 249
6.1.3 Eine semilineare elliptische Aufgabe * . . . 253
6.2 Steuerprobleme mit Zustandsbeschränkungen . . . 255
6.2.1 Konvexe Aufgaben . . . 256
6.2.2 Eine nichtkonvexe Aufgabe . . . 264
6.3 Übungsaufgaben . . . 267

7 Ergänzungen zu partiellen Differentialgleichungen 268
7.1 Elliptische Gleichungen . . . 268
7.1.1 Beweis des Existenzsatzes . . . 268
7.1.2 Methode von Stampacchia . . . 271
7.1.3 Elliptische Gleichungen mit Maßen . . . 274
7.2 Parabolische Gleichungen . . . 276
7.2.1 Lösungen in $W(0,T)$ . . . 276
7.2.2 Stetige Lösungen . . . 284