

Jan Peter Gehrke

Brückenkurs Mathematik

Fit für Mathematik im Studium

4., erweiterte Auflage

DE GRUYTER
OLDENBOURG

Inhaltsverzeichnis

Vorworte

xiii

I	Einführung	1
I.1	Ein paar Beispiele	1
I.2	Interpretation von Schaubildern	3
I.3	Mathematische Beschreibung von Abhängigkeiten	7
I.4	Der Begriff der Funktion	7
I.5	Einteilung des Zahlenstrahls – Intervalle	10
II	Lineare Funktionen	13
II.1	Die Streckenlänge im kartesischen Koordinatensystem	13
II.2	Der Mittelpunkt einer Strecke im kartesischen Koordinatensystem	15
II.3	Die Hauptform der Geradengleichung	16
II.4	Die gegenseitige Lage von Geraden	23
II.5	Über Schnittwinkel und orthogonale Geraden	25
II.5.1	Eine neue Möglichkeit, die Steigung zu berechnen	25
II.5.2	Zueinander orthogonale Geraden	27
II.5.3	Der Schnittwinkel zweier Geraden	30
III	Quadratische Funktionen	35
III.1	Die Binomischen Formeln	35
III.1.1	Die 1. Binomische Formel	35
III.1.2	Die 2. Binomische Formel	36
III.1.3	Die 3. Binomische Formel	37
III.1.4	Der Weg zurück – Die Binomischen Formeln im Rückwärtsgang	37
III.2	Der Umgang mit quadratischen Funktionen	39
III.2.1	Die Mitternachtsformel (MNF)	39
III.2.2	Von der Scheitelform zur Normalform und wieder zurück – There and back again	42
III.2.3	Scheitelermittlung durch „Absenken“	46
III.3	Die Herleitung der Mitternachtsformel	49
III.4	Der Umgang mit Parabelscharen – Grundlagen Parameterfunktionen	52
III.5	Zusammenfassung des Unterkapitels über Parameterfunktionen	65

IV	Grundlagen Potenzfunktionen	67
IV.1	Potenzfunktionen – Definition und ein paar Eigenschaften	67
IV.1.1	Parabeln n-ter Ordnung	67
IV.1.2	Hyperbeln n-ter Ordnung	69
IV.2	Die Potenzgesetze	71
IV.2.1	Warum Hochzahlen praktisch sind	72
IV.2.2	Das „nullte“ Potenzgesetz und noch eine Definition	73
IV.2.3	Das erste Potenzgesetz	74
IV.2.4	Das zweite Potenzgesetz	74
IV.2.5	Das dritte Potenzgesetz	75
IV.2.6	Das vierte Potenzgesetz	75
IV.2.7	Das fünfte Potenzgesetz	76
IV.2.8	Rationale Hochzahlen	76
IV.2.9	Rechnen ohne Klammern – Vorfahrtsregeln beim Rechnen	78
IV.3	Rechnen mit Wurzeln – Einfache Wurzelgleichungen	79
IV.4	Die Logarithmengesetze	83
V	Ganzrationale Funktionen – Eine Einführung	91
V.1	Definition und Grenzverhalten	91
V.2	Zur Symmetrie bei ganzrationalen Funktionen	95
V.3	Noch mehr Symmetrie – Symmetrie zu beliebigen Achsen und Punkten	96
V.4	Ganzrationale Funktionen und ihre Nullstellen	99
V.4.1	Warum die Polynomdivision funktioniert	99
V.4.2	Das Horner-Schema	101
V.4.3	Nullstellen und Substitution bei ganzrationalen Funktionen	105
V.5	Das Baukastenprinzip – Zusammengesetzte Funktionen	106
V.5.1	Addition und Subtraktion von Funktionen	106
V.5.2	Multiplikation und Division von Funktionen	109
V.6	Den Überblick behalten – Gebietseinteilungen vornehmen	112
V.7	Beträge von Zahlen/Funktionen und Betragsgleichungen	113
V.7.1	Vom Betrag einer Zahl und den dazugehörigen Rechenregeln	113
V.7.2	Der Betrag einer Funktion oder Ebbe in den Quadranten Nummer III und IV	116
V.7.3	Die abschnittsweise definierte Funktion in Gleichungen – Jetzt wird’s kritisch!	121
V.7.4	Betragsgleichungen	123
VI	Die vollständige Induktion und (ihre) Folgen	131
VI.1	Grundlagen	131
VI.1.1	Ein paar Spielregeln zu Beginn	131
VI.1.2	Darstellungsformen von Folgen	132
VI.1.3	Die Definition der Monotonie	133
VI.1.4	Der Nachweis der Monotonie	134
VI.1.5	Beschränktheit	134

VI.2	Der Grenzwert einer Folge	136
VI.2.1	Die Definition des Grenzwertes	136
VI.2.2	Zwei Sätze und ein paar Begriffe	137
VI.3	Die Grenzwertsätze	138
VI.3.1	Die 3 Grenzwertsätze	138
VI.3.2	Ein Beweis zu den Grenzwertsätzen	139
VI.3.3	Berechnung der Grenzwerte bei rekursiven Folgen	140
VI.4	Arithmetische und geometrische Folgen	141
VI.4.1	Arithmetische Folgen I – Ein paar Grundlagen	141
VI.4.2	Geometrische Folgen I – Ein paar Grundlagen	142
VI.5	Die vollständige Induktion – Ein mächtiges Beweisverfahren	144
VI.5.1	Arithmetische Folgen II – Die Summe der Folgenglieder	147
VI.5.2	Geometrische Folgen II – Die Summe der Folgenglieder	149
VI.5.3	Vollständige Induktion in Beispielen	150
VI.6	Ein Test aller Gelernten – Die Fibonacci-Zahlenfolge	156
VI.6.1	Einführung und historischer Abriss	157
VI.6.2	Die Fibonacci-Zahlenfolge – Grundlagen	158
VI.6.3	Die Kaninchen-Aufgabe	161
VI.6.4	Der Goldene Schnitt	163
VI.6.5	Die Herleitung der expliziten Formel	164
VII	Einführung in die Differentialrechnung	169
VII.1	Vom Differenzen- zum Differentialquotienten	169
VII.2	Die Ableitung einer Potenzfunktion und die Tangentengleichung	173
VII.2.1	Der Umgang mit Berührungspunkten	178
VII.3	Die Herleitungen der Ableitungsregeln	179
VII.3.1	Die Summenregel	180
VII.3.2	Die Faktorregel	182
VII.3.3	Die Produktregel	183
VII.3.4	Die Quotientenregel	185
VII.3.5	Die Kettenregel	188
VII.4	Wichtige Punkte eines Funktionsgraphen	190
VII.4.1	Extrempunkte	191
VII.4.2	Wendepunkte	205
VII.4.3	Neu und alt – Ableitung trifft Parameter	210
VII.5	Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Monotonie und die Wertetabelle	215
VII.5.1	Stetigkeit – Ohne Sprung ans Ziel	215
VII.5.2	Differenzierbarkeit – Knickfrei durch's Leben	218
VII.5.3	Monotonie – Wo geht's denn hin?	220
VII.5.4	Die Wertetabelle – Eine oft ignorierte Zeichenhilfe	225
VII.6	Die Kurvendiskussion – Gesamtübersicht mit Beispiel	226

VIII	Über das Lösen linearer Gleichungssysteme	229
VIII.1	LGS mit 2 Unbekannten und 2 Gleichungen	229
VIII.1.1	Das Gleichsetzungsverfahren	230
VIII.1.2	Das Einsetzungsverfahren	231
VIII.1.3	Das Additionsverfahren	232
VIII.1.4	Der Umgang mit Parametern bei einem LGS	233
VIII.2	LGS mit 3 und mehr Unbekannten	234
VIII.2.1	Das Gaußsche Eliminationsverfahren	234
VIII.2.2	Gibt es Lösungen – und wenn ja wie viele?	237
VIII.3	LGS und Funktionen – Bestimmung ganzzahliger Funktionen	243
IX	Mit Brüchen muss man umgehen können – Gebrochenrationale Funktionen	253
IX.1	Grundlagen – Umgang mit Bruchgleichungen und Brüchen	253
IX.2	Definition der gebrochenrationalen Funktionen	258
IX.3	Ein paar Besonderheiten – Definitionslücken und Asymptoten	258
IX.4	Ableiten gebrochenrationaler Funktionen	269
X	Trigonometrische Funktionen	271
X.1	Grundlagen und Ableitungsregeln	271
X.1.1	Definition und Beispiele	271
X.1.2	Vom Einheitskreis zur Funktion	273
X.1.3	Das Bogenmaß	278
X.1.4	Andere Winkel	279
X.1.5	Der Sinussatz	280
X.1.6	Der Kosinussatz	282
X.1.7	Weitere Betrachtungen zum Einheitskreis	284
X.1.8	Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen – Ein wenig Nostalgie bei der Herleitung	287
X.2	Übersicht über die Eigenschaften der trigonometrischen Grundfunktionen	292
X.3	Die Modifizierung trigonometrischer Funktionen (Sinus und Kosinus)	296
XI	Wachsen ist schön – Exponentialfunktionen	305
XI.1	Grundlagen	305
XI.2	Ableiten von Exponentialfunktionen	306
XI.3	Wachstum	313
XI.3.1	Lineares Wachstum	314
XI.3.2	Exponentielles/Natürliches Wachstum	314
XI.3.3	Beschränktes Wachstum	319
XI.3.4	Logistisches Wachstum	319
XI.4	Die Grenzen erfahren – Grenzwertuntersuchung mit L'Hospital	321

XII	Die Ableitung der Umkehrfunktion	325
XII.1	Was ist eine Umkehrfunktion? – Grundlagen und Begriffe	325
XII.2	Ableiten von Umkehrfunktionen	331
XII.2.1	Implizites Differenzieren	331
XII.2.2	Ableiten von Umkehrfunktionen mit der Kettenregel	332
XIII	Integralrechnung	335
XIII.1	Schritt für Schritt zum Ziel – Ober- und Untersumme	335
XIII.1.1	Ober- und Untersumme	335
XIII.2	Was haben Stammfunktionen und Integralfunktionen gemeinsam?	343
XIII.3	Übersicht zu wichtigen Stammfunktionen	346
XIII.3.1	Aufleiten mittels der linearen Substitution	349
XIII.3.2	Etwas Interessantes – Die Produktintegration	350
XIII.3.3	Ein praktischer Satz – Über das Aufleiten von Brüchen	352
XIII.4	Flächenberechnung – Worauf man achten sollte	353
XIII.5	Einmal rundherum – Berechnung von Rotationsvolumen	356
XIV	Beweise mit Vektoren führen	361
XIV.1	Der Vektor in der analytischen Geometrie	361
XIV.2	Linear abhängig und unabhängig	363
XIV.3	Das Prinzip des geschlossenen Vektorzugs	364
XIV.3.1	Ein Beispiel: Teilverhältnis der Seitenhalbierenden im Dreieck	365
XIV.4	Ein erstes Produkt für Vektoren: Das Skalarprodukt	367
XIV.4.1	Von Vektoren und ihren Beträgen	368
XIV.4.2	Das Skalarprodukt: Die Definition und ihre Konsequenzen	373
XIV.4.3	Was man vom Skalarprodukt zum Beweisen benötigt	376
XIV.4.4	Ein Beispiel: Der Satz des Thales	377
XIV.5	Eine Aufgabe zur Vertiefung	378
XV	Rechnen im Raum – Analytische Geometrie	381
XV.1	Noch ein Produkt für Vektoren: Das Kreuzprodukt	381
XV.2	Eine Runde Teamwork – Das Spatprodukt	386
XV.3	Geraden und Vektoren	388
XV.4	Ebenen	390
XV.4.1	Die Koordinatenform	392
XV.4.2	Die Normalenform	395
XV.4.3	Umwandeln von Ebenen	397
XV.5	Lagebeziehungen	400
XV.5.1	Gegenseitige Lagen von Geraden	400
XV.5.2	Gegenseitige Lagen von Ebenen	402
XV.5.3	Gegenseitige Lagen von Ebene und Gerade	407

XV.6	Abstände	407
XV.6.1	Der Abstand zweier Punkte	408
XV.6.2	Die Hessesche Normalenform – Abstandsbestimmungen bei Ebenen	408
XV.6.3	Abstände, die uns noch fehlen	412
XV.7	Ein kurzes Wort über Schnittwinkel	416
XV.8	Ein kugelrunder Abschluss	418
XVI	Wenn's nicht direkt geht – Ein wenig Numerik	421
XVI.1	Für Nullstellen – Das Newton-Verfahren	421
XVI.1.1	Wann Newton nicht funktioniert	424
XVI.1.2	Übersicht mit Beispiel	424
XVI.2	Für Flächen – Die Keplersche Fassregel	425
XVI.2.1	Sehnentrapeze	426
XVI.2.2	Tangententrapeze	427
XVI.3	Wo Kepler aufhört, da fängt Simpson an – Die Simpson-Regel	428
XVII	Wem's reell nicht genug ist – Komplexe Zahlen	431
XVII.1	Von natürlich bis reell – Eine kurze Geschichte der Zahlen	431
XVII.2	Komplexe Zahlen – Definition und Grundlagen	435
XVII.3	Rechnen mit komplexen Zahlen I	436
XVII.4	Polarkoordinaten und komplexe Zahlen	440
XVII.5	Euler und eine der schönsten Gleichungen der Mathematik	444
XVII.6	Rechnen mit komplexen Zahlen II	449
XVII.7	Potenzen berechnen und Wurzelziehen bei komplexen Zahlen	451
XVII.8	Bastelstunde: Additionstheoreme	454
Anhang		
A	Die Strahlensätze	459
A.1	Einführende Betrachtungen	459
A.2	Der 1. Strahlensatz	460
A.3	Der 2. Strahlensatz	461
A.4	„Kurzversion“ des 1. Strahlensatzes	462
B	Ungleich geht die Welt zugrunde – Rechnen mit Ungleichungen	465
B.1	Ganz elementare Regeln	465
B.2	Beispiele statt allgemeiner Hudelei	466
C	Das Pascalsche Dreieck	469
C.1	Worum es geht	469
C.2	Zum Aufstellen des Dreiecks	470
C.3	Warum das Schema funktioniert	471
Weiterführende Literatur		475
Stichwortverzeichnis		477