

Peter Steinke

# Finite-Elemente-Methode

Rechnergestützte Einführung

**2., neu bearbeitete Auflage**

**Mit 171 Abbildungen und 39 Tabellen**

 Springer

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	
1.1	Vorgehensweise bei der FEM	3
1.2	Verschiedene Elementtypen	5
1.3	Beispiele zur Finite-Elemente-Methode	10
1.3.1	Beispiel zu nichtlinearen Problemen	10
1.3.2	Beispiele zur Optimierung	11
<b>2</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	
2.1	Schreibweisen	19
2.2	Vektoren	20
2.2.1	Definition eines $n$ dimensionalen Vektors	20
2.2.2	Skalarprodukt	20
2.2.3	Kreuzprodukt	20
2.2.4	Ableitung von Vektoren	21
2.2.5	Der Nabla-Vektor	22
2.2.6	Der Gradientenvektor	22
2.2.7	Divergenz und Laplace-Operator	23
2.3	Matrizen	23
2.3.1	Definition einer Matrix	23
2.3.2	Rechenregeln	24
2.3.3	Transponierte Matrix	26
2.3.4	Orthogonale Matrix	27
2.4	Die Dyade (Tensor zweiter Stufe)	27
2.4.1	Differentialoperator	28
2.4.2	Tensor höherer Stufe	28
2.5	Felder	28
2.5.1	Skalarfelder	28
2.5.2	Das Vektorfeld als Gradient des Skalarfeldes	29
2.5.3	Das dyadische Feld	29
2.6	Lineare Transformation	32
2.6.1	Transformation eines Vektors	32
2.6.2	Transformation einer Dyade (Tensor zweiter Stufe)	34
2.6.3	Beispiele zur Transformation	34
2.7	Funktionale	36
2.7.1	Diskretisierung des Funktionalis	38
2.8	Dreieckskoordinaten	39
2.8.1	Ableitungen in Dreieckskoordinaten (Jakobi-Matrix)	41
2.8.2	Integration in Dreieckskoordinaten	44
2.9	Numerische Integration (Quadratur)	45
2.9.1	Numerische Integration für eindimensionale Probleme ...	45

2.9.2	Numerische Integration in Dreieckskoordinaten	46
2.10	Lineare Gleichungssysteme bei der FEM	48
2.10.1	Definition der Bandbreite	48
2.10.2	Rechenzeiten zur Lösung linearer Gleichungssysteme	49
2.10.3	Positiv definite Matrix	50
2.10.4	Das Verfahren von Cholesky	51
2.10.5	Kondition linearer Gleichungssysteme	53
2.10.6	Zwangsbedingungen bei linearen Gleichungssystemen ....	56
2.11	Näherungsfehler bei der FEM	57
2.12	Das Tonti-Diagramm	58
<b>3</b>	<b>Beschreibung elastostatischer Probleme</b>	
3.1	Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie	63
3.1.1	Verknüpfung der Verschiebungen mit den Dehnungen ...	63
3.1.2	Das Stoffgesetz	64
3.1.3	Gleichgewichtsbedingungen	64
3.1.4	Randbedingungen	64
3.1.5	Das Tonti-Diagramm des elastostatischen Problems	65
3.1.6	Verknüpfung der Grundgleichungen der Elastostatik	66
3.2	Das Prinzip virtueller Verrückungen	67
3.2.1	Das Prinzip vom Gesamtpotential	67
3.2.2	Beispiel zum Prinzip des Gesamtpotentials	69
<b>4</b>	<b>Das-Verfahren von Ritz</b>	
4.1	Aufprägen der wesentlichen Randbedingungen	74
4.1.1	Beispiel zu den wesentlichen Randbedingungen	75
4.2	Eindimensionale Stabprobleme	77
4.2.1	Diskretisierung der Formänderungsarbeit	77
4.2.2	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten	78
4.2.3	Beispiel zum eindimensionalen Stab	79
4.3	Eindimensionale Balkenprobleme	81
4.3.1	Diskretisierung der Formänderungsarbeit	81
4.3.2	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten	81
4.3.3	Variation des Gesamtpotentials	82
4.4	Scheibenproblem	86
4.4.1	Verschiebungsansätze	87
4.4.2	Wesentliche Randbedingungen	87
4.4.3	Dehnungen und Spannungen der Scheibe	88
4.4.4	Diskretisierung der Formänderungsarbeit	89
4.4.5	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten	90
4.4.6	Variation des Gesamtpotentials	91
4.4.7	Kragbalken als Scheibenproblem...	91

**5 Stabelemente**

5.1	Das eindimensionale Stabelement	97
5.1.1	Problemdefinition	97
5.1.2	Das Tonti-Diagramm des Stabes	97
5.1.3	Das Funktional des Stabproblems	100
5.1.4	Diskretisierung des Funktionals des Stabes	100
5.1.5	Variation des Funktionals	103
5.1.6	Beispiel zum eindimensionalen Stab	105
5.1.7	Direkte Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix	111
5.1.8	Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix (allgemein)	113
5.1.9	Übungsaufgaben zum eindimensionalen Stab	115
5.1.10	Variable Querschnittsfläche des Stabelementes	115
5.1.11	Eindimensionales Stabelement mit $n$ Knoten	117
5.1.12	Eindimensionaler Stab mit drei bzw. vier Knoten	119
5.2	Das zwei- und dreidimensionale Stabelement	120
5.2.1	Das zweidimensionale Stabelement	120
5.2.2	Beispiel zum zweidimensionalen Stabproblem	123
5.2.3	Optimierung einer Stabstruktur	128
5.2.4	Übungsaufgaben zum zweidimensionalen Stab	130
5.2.5	Das dreidimensionale Stabelement	132

**6 Balkenelemente**

6.1	Das eindimensionale Balkenelement	137
6.1.1	Problemdefinition	137
6.1.2	Dehnungen und Spannungen im Balken	138
6.1.3	Das Tonti-Diagramm des Bernoulli-Balkens	139
6.1.4	Funktional des Balkenproblems	140
6.1.5	Formfunktionen des eindimensionalen Balkens	141
6.1.6	Diskretisierung des Funktionals	143
6.1.7	Variation des diskretisierten Funktionals	145
6.1.8	Bilden der Steifigkeitsmatrix	146
6.1.9	Diskretisierung der Streckenlast	147
6.1.10	Schnittgrößen des Balkenelementes	149
6.2	Beispiel zum eindimensionalen Balken	151
6.2.1	Zweiseitig gelagerter Balken mit Streckenlast	151
6.2.2	Konvergenztest beim zweiknotigen Balkenelement	154
6.2.3	Realisierung des Gelenkes über eine Zwangsbedingung...	157
6.3	Übungsaufgaben zum eindimensionalen Balken	159
6.4	Balkenelement mit $n$ Knoten und $p$ Freiheitsgraden pro Knoten	161
6.4.1	Das eindimensionale Balkenelement mit drei Knoten	164

6.4.2	Das eindimensionale Balkenelement mit drei Freiheitsgraden pro Knoten	168
6.4.3	Balken mit unstetiger Krümmungsverteilung	171
6.5	Der Timoshenko-Balken	172
6.5.1	Konvergenztest Kragbalken	178
6.5.2	Balkenbeispiel VII	179
6.6	Der elastisch gelagerte Balken	180
6.6.1	Beispiel zum elastisch gelagerten Balken	182
6.7	Zweidimensionales Balkenelement	187
6.7.1	Freiheitsgrade des zweidimensionalen Balkens	187
6.7.2	Überlagerung der Dehnungen von Stab und Balken	187
6.7.3	Steifigkeitsmatrix	188
6.7.4	Transformation der Steifigkeitsmatrix	190
6.8	Beispiel und Übungsaufgaben zum zweidimensionalen Balken	193
6.8.1	Winkelproblem	193
6.8.2	Übungsaufgaben zum zweidimensionalen Balken	199
<b>7</b>	<b>Scheibenproblem</b>	
7.1	Problemdefinition	205
7.2	Die Grundgleichungen des Scheibenproblems	206
7.2.1	Die Feldgleichungen der Scheibe	207
7.3	Das Funktional des Scheibenproblems	208
7.4	Diskretisierung des Funktionais	209
7.4.1	Formfunktionen des Dreieckselementes	209
7.4.2	Variation des diskretisierten Funktionais	213
7.4.3	Diskretisierung der Volumenkräfte	215
7.4.4	Diskretisierung der Streckenlasten	218
7.4.5	Spannungen in der Scheibe	221
7.5	Beispiele zum Scheibenproblem	221
7.6	Übungsaufgaben zur Scheibe	227
<b>8</b>	<b>Platten und Schalenelemente</b>	
8.1	Problemdefinition	231
8.2	Grundbeziehungen der Platte	231
8.2.1	Voraussetzungen bei der Kirchhoff-Platte	231
8.2.2	Kinematische Größen der Platte	233
8.2.3	Krümmungs-Momenten-Beziehung (Stoffgleichung)	234
8.2.4	Gleichgewichtsbeziehungen der Platte	236
8.2.5	Randbedingungen der Platte	236
8.3	Das Funktional der Platte	237
8.4	Anforderungen an das Plattenelement	239

8.4.1	Kompatibilität (konforme Elemente)	239
8.4.2	Starrkörperbewegung	240
8.4.3	Konstanter Dehnungszustand (Verzerrungszustand)	241
8.4.4	Einige Dreiecksplattenelemente	241
8.5	Diskretisierung des Funktionais	243
8.5.1	Ansatzfunktion für die Durchbiegung	243
8.5.2	Interpolationsbedingungen	244
8.5.3	Formfunktionen	247
8.5.4	Krümmungs-Verschiebungs-Beziehung	248
8.5.5	Steifigkeitsmatrix	249
8.5.6	Flächenlast	250
8.5.7	Streckenlast entlang einer Elementkante	250
8.6	Konvergenztest des Plattenelementes	251
8.7	Schalenelement	253
<b>9</b>	<b>Feldprobleme</b>	
9.1	Wärmeübertragung	263
9.1.1	Die Poisson'sche-Gleichung	263
9.1.2	Randbedingungen	263
9.1.3	Das Funktional der Wärmeübertragung	264
9.2	Eindimensionale Wärmeübertragung	265
9.2.1	Problemdefinition	265
9.2.2	Funktional des eindimensionalen Wärmeübertragungsproblems	266
9.2.3	Diskretisierung des Funktionais	266
9.2.4	Variation des Funktionais	270
9.2.5	Beispiel zur eindimensionalen Wärmeübertragung	271
9.2.6	Übungsaufgaben: Eindimensionale Wärmeübertragung...	276
9.3	Zweidimensionale Wärmeübertragung	277
9.3.1	Problemdefinition	277
9.3.2	Randbedingungen bei der zweidimensionalen Wärmeübertragung	278
9.3.3	Diskretisierung des Funktionais	279
9.3.4	Variation des Funktionais	286
9.4	Beispiel zur zweidimensionalen Wärmeübertragung	288
9.5	Übungsaufgaben zur zweidimensionalen Wärmeübertragung	293
9.6	Torsion von prismatischen Körpern	295
9.6.1	Funktional des Torsionsproblems	298
9.6.2	Torsion eines Stabes mit quadratischem Querschnitt	298

<b>10</b>	<b>Eigenfrequenzen und Schwingungsformen von Stäben und Balken</b>	
10.1	Der eindimensionale Stab	303
10.1.1	Massenmatrix des eindimensionalen Stabes	304
10.1.2	Eigenfrequenzen und Schwingungsformen	304
10.2	Beispiele zum eindimensionalen Stab	306
10.2.1	Einmassenschwinger	306
10.2.2	Zweimassenschwinger	307
10.3	Der eindimensionale Balken	310
10.3.1	Massenmatrix des eindimensionalen Balkens	310
10.4	Beispiele zum eindimensionalen Balken	311
10.4.1	Beidseitig gelenkig gelagerte Balken	311
10.4.2	Kragbalken	314
<b>11</b>	<b>Nichtlineare Probleme</b>	
11.1	Große Verformungen	319
11.1.1	Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung	319
11.1.2	Dehnungen für Stab und Balken	320
11.1.3	Stab mit großen Verformungen	320
11.1.4	Balken mit großen Verformungen	323
11.2	Knicken von Stäben und Balken	327
11.2.1	Beispiel zum Stabknicken	329
11.2.2	Beispiel zum Knicken von Balken	332
11.2.3	Die vier Eulerfälle	335
11.2.4	Übungsaufgabe: Das dreiknotige Balkenelement	336
<b>12</b>	<b>CALL_for_FEM</b>	
12.1	Kurzübersicht über die einzelnen Programme	339
12.2	Programmbeschreibungen	343
12.2.1	FEM GEN und FEM CAS	343
12.2.2	Das Programm InterFEM	343
12.2.3	Das Verfahren von Ritz für den eindimensionalen Stab (Ritz_Stab)	345
12.2.4	Das Verfahren von Ritz für den Balken (Ritz.Balken)...	347
12.2.5	Das Verfahren von Ritz für die Scheibe (Ritz_Scheibe) ..	349
12.2.6	Eindimensionales Stabelement (Stab.ID)	351
12.2.7	Eindimensionales Balkenelement (Balken_ID)	353
12.2.8	Dreiecksscheibenelement (Scheibe_Dreieck)	355
12.2.9	Plattenelement (Platte)	356
12.2.10	Knicken eines eindimensionalen Balkens (Knicken_Balken)	356
12.2.11	Eigenfrequenzen und Schwingungsform des Balkens (Dynamik_Balken)	358

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>XV</b>
12.2.12 Eindimensionale Feldprobleme (Feldprobleme.ID)	359
12.2.13 Zweidimensionales Feldproblem (Feldprobleme_2D)	360
<b>13 Beispiele zu den Programmen</b>	
13.1 Rahmen durch Federn gestützt	363
13.2 Scheibe gestützt durch eine Feder	364
13.3 Wärmeübertragung (Torsion) eines gleichseitigen Dreiecks (Quadrates)	367
<b>Verwendete Formelzeichen und Symbole</b>	<b>370</b>
<b>Literatur</b>	<b>381</b>
<b>Sachverzeichnis</b>	<b>385</b>
<b>Programme</b>	<b>393</b>