

Nicole Branger · Christian Schlag

# Zinsderivate

Modelle und Bewertung

Mit 33 Abbildungen

**Springer**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ein Überblick über zinsensitive Finanztitel</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Zinsstrukturen und Zinsderivate</b>	<b>7</b>
2.1	Zinsstrukturen	8
2.1.1	Diskontierungsfunktion	8
2.1.2	Kassazins	8
2.1.3	Terminzins	9
2.1.4	Kurzfristiger Terminzins	11
2.1.5	Zinssicherheit und Zinsunsicherheit	12
2.2	Anleihen	13
2.2.1	Nullkuponanleihe	13
2.2.2	Kuponanleihe	13
2.2.2.1	Festverzinsliche Anleihe	13
2.2.2.2	Variabel verzinsliche Anleihe	14
2.3	Anleiheoptionen	16
2.3.1	Verteilungsfreie Wertuntergrenzen für Anleiheoptionen	17
2.3.2	Verteilungsfreie Wertobergrenzen für Anleiheoptionen	18
2.3.3	Vorzeitige Ausübung amerikanischer Anleiheoptionen	19
2.3.4	Put-Call-Parität für europäische Optionen	19
2.4	Forwards und Futures auf Anleihen	20
2.4.1	Forwards	20
2.4.2	Futures	21
2.5	Forwards und Futures auf Zinsen	22
2.6	Swaps	23
2.6.1	Payer und Receiver Swaps	23
2.6.1.1	Payer Swaps	24
2.6.1.2	Receiver Swaps	24
2.6.1.3	Swap Rate	24
2.6.2	Forward Swaps	25
2.6.3	Swaptions	25
2.7	Caps, Floors und Collars	26

2.7.1	Caps	26
2.7.2	Floors	28
2.7.3	Cap-Floor-Parität	29
2.7.4	Collars	30
2.8	Aufgaben	31
2.9	Lösungshinweise	33
<b>3</b>	<b>Bewertung in diskreter Zeit</b>	<b>35</b>
3.1	Einperiodiges Modell	36
3.1.1	Modellökonomie	36
3.1.2	Arbitragemöglichkeiten	37
3.1.3	Duplikation	39
3.1.4	Vollständigkeit	39
3.1.5	Risikoneutrales Martingalmaß (RNM)	40
3.2	Mehrperiodiges Modell	44
3.2.1	Modellökonomie	44
3.2.2	Duplikation und Rückwärtsrechnung im Baum	46
3.2.3	Vollständigkeit	47
3.2.4	Arbitragefreiheit	47
3.2.5	Risikoneutrale Bewertung	48
3.2.6	Zwischenzeitliche Zahlungen	49
3.2.7	Amerikanische Derivate	49
3.3	Aufgaben	51
3.4	Lösungshinweise	54
<b>4</b>	<b>Diskrete Zinsmodelle</b>	<b>57</b>
4.1	Überblick	57
4.2	Besonderheiten von Zinsmodellen	58
4.3	Das Modell von Ho und Lee	59
4.3.1	Beschreibung des Modells	59
4.3.1.1	Baum der Diskontierungsfunktion	59
4.3.1.2	Beispiel	65
4.3.1.3	Volatilitätsparameter	65
4.3.1.4	Anleihepreise	66
4.3.2	Zinsstruktur	67
4.3.2.1	Short Rate	67
4.3.2.2	Fortführung des Beispiels: Baum der Short Rate	69
4.3.2.3	Kassazinsen	69
4.3.2.4	Terminzinsen	70
4.3.3	Bewertung von Derivaten	70
4.3.3.1	Optionen	71
4.3.3.2	Futures	73
4.3.3.3	Fortführung des Beispiels: Futures- und Forwardpreis	75
4.3.3.4	Caps und Floors	75

4.3.3.5	Fortführung des Beispiels: Bewertung von Caps und Floors	76
4.4	Das Modell von Black, Derman und Toy	79
4.4.1	Baum der Short Rate	80
4.4.2	Kalibration des Modells	81
4.4.2.1	Gegebene Volatilitäten der Short Rates	81
4.4.2.2	Gegebene Volatilitäten der Kassazinsen in $t - 1$	81
4.4.3	Beispiel	84
4.5	Terminrisikoangepasste Bewertung	87
4.6	Aufgaben	95
4.7	Lösungshinweise	98
<b>5</b>	<b>Bewertung in stetiger Zeit</b>	<b>105</b>
5.1	Modellökonomie	106
5.2	Grundlagen der stochastischen Analysis	106
5.2.1	Stochastische Prozesse	107
5.2.2	Wiener Prozesse, stochastische Differentialgleichungen und stochastische Integrale	107
5.2.3	Itös Lemma	111
5.3	Risikoneutrale Bewertung	113
5.3.1	Bestimmung des risikoneutralen Maßes	114
5.3.2	Bewertung von Derivaten	116
5.4	Fundamentale partielle Differentialgleichung	117
5.5	Aufgaben	120
5.6	Lösungshinweise	121
<b>6</b>	<b>Zeitstetige Zinsmodelle</b>	<b>125</b>
6.1	Überblick	125
6.2	Das Modell von Heath, Jarrow und Morton	126
6.2.1	Modellbeschreibung	126
6.2.1.1	Stochastik der Forwardzinsen und der Anleihepreise	127
6.2.1.2	Arbitragefreiheit und Driftrestriktionen	129
6.2.2	Risikoneutrale Bewertung	130
6.2.2.1	Bestimmung des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes	130
6.2.2.2	Stochastik unter dem risikoneutralen Maß	131
6.2.2.3	Risikoneutrale Bewertung von Derivaten	132
6.2.3	Terminrisikoangepasste Bewertung	132
6.2.3.1	Bestimmung des terminrisikoangepassten Maßes	132
6.2.3.2	Prozesse unter dem terminrisikoangepassten Maß	134
6.2.3.3	Terminrisikoangepasste Bewertung von Derivaten	134
6.2.3.4	Beispiel: Bewertung eines europäischen Calls	134

	6.2.3.5	Beispiel: Forward- und Futurespreise	135
	6.2.4	Verallgemeinerung: d-dimensionaler Wiener Prozess ....	136
	6.2.5	Gauß-Zinsmodelle	137
	6.2.5.1	Exkurs: Normalverteilung und Lognormalverteilung	138
	6.2.5.2	Bewertung von Anleihen, Futures und Optionen im Gauß-Zinsmodell	139
	6.2.5.3	Gauß-Zinsmodell mit konstanter Volatilität ...	144
	6.2.5.4	Gauß-Zinsmodell mit exponentiell gedämpfter Volatilität	147
<b>6.3</b>		<b>Das LIBOR Market-Modell</b>	<b>149</b>
	<b>6.3.1</b>	<b>Definition des LIBOR</b>	<b>149</b>
	6.3.2	Modellierung des Forward-LiBOR	150
	6.3.3	Terminal Measure	151
	6.3.3.1	Zusammenhang zwischen den terminrisikonangepassten Maßen	151
	6.3.3.2	Forward-LiBOR unter dem Terminal Measure ..	152
	6.3.4	Bewertung von Derivaten im LIBOR Market-Modell....	153
	6.3.4.1	Bewertung einer variabel verzinslichen Zahlung	153
	6.3.4.2	Bewertung eines Caps	154
6.4		Das Swap Market-Modell	155
	6.4.1	Definition und Modellierung der Swap Rate	155
	6.4.2	Bewertung einer Swaption	155
6.5		Short Rate-Modelle	157
	6.5.1	Grundlagen	157
	6.5.1.1	Beschreibung der Unsicherheit	157
	6.5.1.2	Bestimmung des risikoneutralen Maßes	158
	6.5.1.3	Bewertung von Derivaten in Short Rate-Modellen	159
	6.5.1.4	Modellendogene Zinsstruktur	159
	6.5.1.5	Abgrenzung von Short Rate-Modellen gegen das HJM-Modell	160
	6.5.2	Die zeitstetige Version des Modells von Ho und Lee ....	161
	6.5.2.1	Beschreibung des Modells	162
	6.5.2.2	Verhalten der Short Rate	162
	6.5.2.3	Bestimmung der Zinsstruktur	163
↳	6.5.2.4	Kalibration des Modells	165
∠	6.5.2.5	Verbindung zum Modell von HJM	166
k	<b>6.5.1</b>	<b>Das Modell von Vasicek</b>	<b>168</b>
	6.5.3.1	Beschreibung des Modells	168
	6.5.3.2	Verhalten der Short Rate	169
	6.5.3.3	Bestimmung der Zinsstruktur	170
	6.5.3.4	Kalibration des Modells	172
	6.5.3.5	Verbindung zum Modell von HJM	172
	6.5.4	„Extended Vasicek“	173

6.5.4.1	Beschreibung des Modells	173
6.5.4.2	Verhalten der Short Rate	173
6.5.4.3	Bestimmung der Zinsstruktur	174
6.5.4.4	Kalibration des Modells	176
6.5.4.5	Verbindung zum Modell von HJM	177
6.5.5	Das Modell von Cox, Ingersoll und Ross	178
6.5.5.1	Beschreibung des Modells	178
6.5.5.2	Verhalten der Short Rate	178
6.5.5.3	Bestimmung der Zinsstruktur	180
6.6	Aufgaben	182
6.7	Lösungshinweise	187
<b>Abbildungsverzeichnis</b>		<b>193</b>
<b>Literatur</b>		<b>195</b>
<b>Index</b>		<b>197</b>