

---

Dirk Horstmann

# Mathematik für Biologen

2. überarbeitete und ergänzte Auflage



**Springer** Spektrum

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einstieg und grafische Darstellungen von Messdaten</b> . . . . .	1
1.1	Grafische Darstellung von Daten und unterschiedliche Mittelwerte . . . . .	1
1.2	Weitere Analyse der vorliegenden Messdaten . . . . .	8
	Übungsaufgaben . . . . .	13
	Literatur . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Grundlegende Rechenoperationen</b> . . . . .	17
2.1	Welche Zahlen sind aus der Schule bekannt? . . . . .	17
2.1.1	Das Prinzip eines Widerspruchsbeweises . . . . .	20
2.1.2	Weitere Bezeichnungen und Notationen . . . . .	24
2.1.3	Weitere Regeln für das Rechnen mit reellen Zahlen . . . . .	25
2.2	Potenzen, Binomial-Koeffizienten und der „Binomische Lehrsatz“ . . . . .	25
2.2.1	Binomische Formeln . . . . .	27
2.2.2	Das Hardy-Weinberg'sche Gleichgewicht . . . . .	28
2.2.3	Binomial-Koeffizienten und der „Binomische Lehrsatz“ . . . . .	32
2.3	Das Prinzip der vollständigen Induktion . . . . .	34
2.4	Der Umgang mit fehlerhaften Daten/Rechnen mit Fehlern . . . . .	46
	Übungsaufgaben . . . . .	51
	Literatur . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Rechnen mit Ungleichungen</b> . . . . .	55
3.1	Grundregeln für das Rechnen mit Ungleichungen . . . . .	55
3.2	Beschränktheit von Mengen . . . . .	60
	Übungsaufgaben . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Polynome und Polynomdivision</b> . . . . .	63
4.1	Rechenoperationen mit Polynomen . . . . .	63
4.2	Polynomdivision . . . . .	65
	Übungsaufgaben . . . . .	68

<b>5</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b> . . . . .	69
5.1	Das Lösen linearer Gleichungssysteme mithilfe von Einsetzen . . . . .	69
5.2	Die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen . . . . .	72
5.3	Matrizen . . . . .	77
5.3.1	Rechnen mit Matrizen . . . . .	78
5.4	Determinanten und invertierbare Matrizen . . . . .	86
5.4.1	Determinanten . . . . .	87
5.4.2	Berechnung der Inversen . . . . .	90
5.5	Spezielle Gleichungssysteme und die Eigenwerte einer Matrix . . . . .	93
5.5.1	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	97
5.6	Komplexe Zahlen . . . . .	101
5.6.1	Rechnen mit komplexen Zahlen . . . . .	110
	Übungsaufgaben . . . . .	112
	Literatur . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Funktionen</b> . . . . .	119
6.1	Was ist eine Funktion? . . . . .	119
6.1.1	Wie erhält man eine Funktionsgleichung aus experimentellen Daten? . . . . .	120
6.2	Besondere Klassen von Funktionen . . . . .	126
6.2.1	Lineare Funktionen . . . . .	126
6.2.2	Lineare Regression . . . . .	127
6.2.3	Polynome . . . . .	130
6.2.4	Approximation der Daten mithilfe von Lagrange-Polynomen . . . . .	130
6.2.5	Rationale Funktionen . . . . .	133
6.2.6	Partialbruchzerlegung . . . . .	134
6.2.7	Potenzfunktionen . . . . .	137
6.3	Eigenschaften von Funktionen . . . . .	138
	Übungsaufgaben . . . . .	140
	Literatur . . . . .	143
<b>7</b>	<b>Die Exponentialfunktion und ihre Anwendung in der Biologie</b> . . . . .	145
7.1	Die Exponentialfunktion . . . . .	146
7.2	Die Logarithmusfunktion . . . . .	150
7.2.1	Die Radiocarbon-Methode . . . . .	151
7.3	Die allgemeine Exponentialfunktion . . . . .	153
7.4	Logistisches Wachstum . . . . .	154
	Übungsaufgaben . . . . .	155
	Literatur . . . . .	156
<b>8</b>	<b>Die trigonometrischen Funktionen</b> . . . . .	157
8.1	Rechenregeln für die Sinus- und die Cosinusfunktion . . . . .	162
8.1.1	Anwendung von Cosinus und Sinus . . . . .	163
8.1.2	Winkelmaße . . . . .	163

8.2	Tangens und Cotangens . . . . .	164
8.2.1	Die Umkehrfunktionen des Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens . . . . .	165
8.3	Die Darstellung der komplexen Zahlen . . . . .	167
	Literatur . . . . .	168
<b>9</b>	<b>Differentialrechnung</b> . . . . .	169
9.1	Die Ableitung einer Funktion . . . . .	169
9.2	Differentiationsregeln . . . . .	172
	Übungsaufgaben . . . . .	181
	Literatur . . . . .	184
<b>10</b>	<b>Integralrechnung</b> . . . . .	185
10.1	Der Begriff des Integrals . . . . .	186
10.2	Integrationsregeln . . . . .	192
10.3	Uneigentliche Integrale . . . . .	199
	Übungsaufgaben . . . . .	201
	Literatur . . . . .	202
<b>11</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b> . . . . .	203
11.1	Die Trennung der Variablen . . . . .	208
11.2	Die Variation der Konstanten . . . . .	211
11.3	Ansatz vom Typ der rechten Seite . . . . .	216
11.4	Differentialgleichungssysteme . . . . .	222
11.4.1	Von der einzelnen Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung zum Differentialgleichungssystem erster Ordnung . . . . .	223
11.4.2	Lösung von linearen Differentialgleichungssystemen erster Ordnung . . . . .	224
11.4.3	Grafische Darstellung der Lösungen bzw. Phasendiagramme . . . . .	227
11.4.4	Stabilitätsanalyse von stationären Punkten . . . . .	228
11.4.5	Räuber-Beute-Modelle . . . . .	232
	Übungsaufgaben . . . . .	234
	Literatur . . . . .	237
<b>12</b>	<b>Differenzgleichungen</b> . . . . .	239
12.1	Die Fibonacci-Gleichung . . . . .	240
12.2	Homogene lineare Differenzgleichungen . . . . .	242
12.3	Lineare Differenzgleichungen erster Ordnung mit variablen Koeffizienten . . . . .	245
12.4	Allgemeine inhomogene, lineare Differenzgleichungen . . . . .	246
12.5	Erzeugende Funktionen und ihre Anwendungen . . . . .	249
12.5.1	Lösung von Differenzgleichungen mittels erzeugenden und exponentiell erzeugenden Funktionen . . . . .	250
	Übungsaufgaben . . . . .	253
	Literatur . . . . .	255

<b>13</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	257
13.1	Laplace-Wahrscheinlichkeit	258
13.1.1	Eigenschaften der Laplace-Wahrscheinlichkeit	267
13.2	Bedingte Wahrscheinlichkeit	268
13.2.1	Unabhängigkeit von Ereignissen	270
13.3	Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit	272
13.4	Der Satz von Bayes	275
13.5	Statistische Wahrscheinlichkeit	278
	Übungsaufgaben	279
	Literatur	280
<b>14</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsverteilungen</b>	283
14.1	Zufallsvariable	283
14.1.1	Diskrete Zufallsvariable	284
14.1.2	Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen	287
14.1.3	Stetige Zufallsvariable	298
14.1.4	Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen	299
14.2	Unabhängigkeit von Zufallsvariablen	305
14.3	Maßzahlen von Zufallsvariablen	306
14.3.1	Der Mittelwert bzw. der Erwartungswert einer Zufallsvariablen	306
14.3.2	Die Varianz und die Standardabweichung	307
14.3.3	$\alpha$ -Quantile	311
14.3.4	Die Kovarianz und der Korrelationskoeffizient	314
14.4	Kenngrößen für Stichproben	315
14.5	Zentraler Grenzwertsatz	315
	Übungsaufgaben	316
	Literatur	318
<b>15</b>	<b>Parameterschätzung</b>	319
15.1	Schätzung des Erwartungswertes	319
15.1.1	Planung des Stichprobenumfangs bei einer Erwartungswertschätzung	328
15.2	Maximum-Likelihood- und Kleinste-Quadrate-Schätzer	329
15.2.1	Maximum-Likelihood-Schätzer	329
15.2.2	Kleinste-Quadrate-Schätzer	331
15.3	Konfidenzintervalle für Varianzen	335
15.4	Konfidenzintervalle für das Verhältnis zweier Varianzen	338
	Übungsaufgaben	342
	Literatur	343

<b>16</b>	<b>Testen von Hypothesen/Ein-Stichproben-Tests</b> . . . . .	345
16.1	Das Testen von Hypothesen über den Erwartungswert . . . . .	349
16.1.1	Das Testen von Hypothesen über den Erwartungswert einer annähernd normalverteilten Zufallsvariablen bei großen Stichproben ( $N \geq 30$ ) . . . . .	349
16.1.2	Das Testen von Hypothesen bzgl. der Mittelwerte von Bernoulli-Experimenten bei großen Stichproben/ Der sogenannte Binomial-Test . . . . .	351
16.2	Der t-Test . . . . .	354
16.2.1	Der t-Test für abhängige Stichproben . . . . .	356
16.3	Der $\chi^2$ -Test/-Anpassungstest . . . . .	360
	Übungsaufgaben . . . . .	371
	Literatur . . . . .	371
<b>17</b>	<b>Weitere Anmerkungen zur Fehlerrechnung</b> . . . . .	373
17.1	Auswirkung von Eingabefehlern auf Funktionswerte . . . . .	373
	Literatur . . . . .	374
<b>18</b>	<b>Formelsammlung</b> . . . . .	375
18.1	Notationen . . . . .	375
18.2	Intervalle . . . . .	376
18.3	Rechenregeln und -gesetze . . . . .	376
18.4	Potenzsummen . . . . .	378
18.5	Komplexe Zahlen . . . . .	378
18.6	Exponentialfunktionen . . . . .	379
18.7	Logarithmen . . . . .	380
18.8	Trigonometrische Funktionen . . . . .	381
18.9	Ausgewählte Funktionsgleichungen . . . . .	382
18.10	Differentiations- und Integrationsregeln . . . . .	383
18.11	Kennzahlen von Stichproben . . . . .	384
18.11.1	Mittelwerte . . . . .	384
18.11.2	Weitere Kennzahlen für Stichproben . . . . .	385
18.12	Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihre Kenngrößen . . . . .	386
18.12.1	Diskrete Zufallsvariable . . . . .	386
18.12.2	Stetige Zufallsvariable . . . . .	386
18.12.3	Allgemeine Rechenregeln für Kennzahlen diskreter und stetiger Zufallsvariablen . . . . .	388
	<b>Personenverzeichnis</b> . . . . .	389
	<b>Sachverzeichnis</b> . . . . .	391