

Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen

von

Prof. Dr.-Ing. Karl-Rudolf KOCH

Direktor des Instituts für Theoretische Geodäsie
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Zweite, bearbeitete und erweiterte Auflage

Mit 16 Abbildungen
Dümmlerbuch 7892

-3 ÜMMLER BONN

| | |
|---|----|
| Einführung | 1 |
| I Vektor- und Matrixalgebra | 3 |
| II Mengen und Körper | 3 |
| III Mengenbegriff | 3 |
| 112 Verknüpfung von Mengen | 4 |
| 113 Relationen | 5 |
| 11A Körper der reellen Zahlen | 6 |
| 12 Vektoralgebra | 7 |
| 121 Vektordefinition und Vektorraum | 7 |
| 122 Lineare Abhängigkeit und Basis eines Vektorraums | 10 |
| 123 Skalarprodukt und Euklidischer Raum | 13 |
| 124 Orthogonale Unterräume | 14 |
| 13 Matrizen | 17 |
| 131 Matrixdefinition und Matrixverknüpfungen | 17 |
| 132 Rang einer Matrix | 23 |
| 133 Berechnung inverser Matrizen | 28 |
| 134 Matrizenidentitäten | 39 |
| 135 Spaltenraum und Nullraum einer Matrix | 40 |
| 136 Determinanten | 42 |
| 137 Spur einer Matrix und Darstellung einer Matrix als Vektor ... | 47 |
| 14 Quadratische Formen | 48 |
| 141 Transformationen | 48 |
| 142 Eigenwerte und Eigenvektoren | 51 |
| 143 Definite Matrizen | 53 |

| | | |
|-----|---|-----|
| 15 | Generalisierte Inversen | 56 |
| 151 | Rechts- und Linksinversen | 56 |
| 152 | Idempotente Matrizen | 56 |
| 153 | Generalisierte Inverse, reflexive generalisierte Inverse und Pseudoinverse | 58 |
| 154 | Lineare Gleichungssysteme | 63 |
| 155 | Generalisierte Inversen symmetrischer Matrizen | 66 |
| 156 | Eigenschaften der Pseudoinversen und einer speziellen symmetrischen reflexiven generalisierten Inversen | 72 |
| 16 | Projektionen | 74 |
| 161 | Allgemeine Projektionen | 74 |
| 162 | Orthogonale Projektionen | 75 |
| 17 | Differentiation und Integration von Vektoren und Matrizen | 76 |
| 171 | Extrema von Funktionen | 76 |
| 172 | Differentialquotienten spezieller Funktionen | 79 |
| 173 | Integration und Variablentransformation | 82 |
| 2 | Wahrscheinlichkeitstheorie | 85 |
| 21 | Wahrscheinlichkeit | 85 |
| 211 | Einführung | 85 |
| 212 | Zufällige Ereignisse | 87 |
| 213 | Axiome der Wahrscheinlichkeit | 89 |
| 214 | Bedingte Wahrscheinlichkeit und Bayessche Formel | 91 |
| 215 | Unabhängige Ereignisse | 92 |
| 22 | Zufallsvariable | 93 |
| 221 | Definition | 93 |
| 222 | Verteilungsfunktion | 94 |
| 223 | Diskrete und stetige Zufallsvariable | 96 |
| 224 | Binomialverteilung und Poisson-Verteilung | 98 |
| 225 | Mehrdimensionale stetige Zufallsvariable | 101 |
| 226 | Randverteilung | 103 |
| 227 | Bedingte Verteilung | 104 |

| | | |
|-----|---|-----|
| 228 | Unabhängige Zufallsvariable | 105 |
| 229 | Transformation von Verteilungen | 106 |
| 23 | Erwartungswerte und Momente von Zufallsvariablen | 107 |
| 231 | Erwartungswert | 107 |
| 232 | Multivariate Momente | 109 |
| 233 | Kovarianzmatrix, Fehlerfortpflanzungsgesetz, Korrelationsmatrix und Gewichtsmatrix | 113 |
| 234 | Momenterzeugende Funktion | 120 |
| 24 | Univariate Verteilungen | 122 |
| 241 | Normalverteilung | 122 |
| 242 | Herleitung der Normalverteilung als Verteilung von Beobach- tungsfehlern | 125 |
| 243 | Gammaverteilung | 126 |
| 244 | Herleitung der Gammaverteilung als Verteilung von Ankunfts- zeiten | 129 |
| 245 | Betaverteilung | 130 |
| 25 | Multivariate Normalverteilung | 133 |
| 251 | Definition und Herleitung | 133 |
| 252 | Momenterzeugende Funktion der Normalverteilung | 135 |
| 253 | Randverteilung und bedingte Verteilung | 137 |
| 254 | Unabhängigkeit normalverteilter Zufallsvariablen | 139 |
| 255 | Lineare Funktionen normalverteilter Zufallsvariablen | 140 |
| 256 | Summe normalverteilter Zufallsvariablen | 141 |
| 26 | Testverteilungen für univariate Modelle der Parameterschätzung | 141 |
| 261 | χ^2 -Verteilung | 141 |
| 262 | Nichtzentrale χ^2 -Verteilung | 144 |
| 263 | F-Verteilung | 146 |
| 264 | Nichtzentrale F-Verteilung | 150 |
| 265 | t-Verteilung | 152 |
| 27 | Quadratische Formen | 154 |
| 271 | Erwartungswert und Kovarianz | 154 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 272 | Verteilung der quadratischen Form | 156 |
| 273 | Unabhängigkeit zweier quadratischer Formen | 156 |
| 274 | Unabhängigkeit einer linearen Form und einer quadratischen Form | 157 |
| 28 | Testverteilungen für multivariate Modelle der Parameterschätzung | 157 |
| 281 | Wishart-Verteilung | 157 |
| 282 | Herleitung der Wishart-Verteilung | 158 |
| 283 | Verteilung der Summe von Wishart-Matrizen | 162 |
| 284 | Verteilung der transformierten Wishart-Matrix | 162 |
| 285 | Verteilung der Matrizen quadratischer Formen und Unabhängigkeit der Wishart-Matrizen | 163 |
| 286 | Verteilung des Verhältnisses der Determinanten zweier Wishart-Matrizen | 165 |
| 287 | Verteilung spezieller Funktionen von Wishart-Matrizen | 169 |
| 3 | Parameterschätzung in linearen Modellen | 173 |
| 31 | Methoden der Parameterschätzung | 174 |
| 311 | Punktschätzung | 174 |
| 312 | Beste erwartungstreue Schätzung | 175 |
| 313 | Methode der kleinsten Quadrate | 177 |
| 314 | Maximum-Likelihood-Methode | 178 |
| 32 | Gauß-Markoff-Modell | 178 |
| 321 | Definition und Linearisierung | 178 |
| 322 | Beste lineare erwartungstreue Schätzung | 182 |
| 323 | Methode der kleinsten Quadrate | 184 |
| 324 | Maximum-Likelihood-Methode | 187 |
| 325 | Erwartungstreue Schätzung der Varianz der Gewichtseinheit | 188 |
| 326 | Numerische Berechnung der Schätzwerte und ihrer Kovarianzen | 192 |
| 327 | Gauß-Markoff-Modell mit Restriktionen | 197 |
| 328 | Rekursive Parameterschätzung | 204 |
| 329 | Abweichungen vom Modell | 205 |
| 33 | Gauß-Markoff-Modell mit nicht vollem Rang | 208 |
| 331 | Methode der kleinsten Quadrate und Maximum-Likelihood-Schätzung | 208 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 332 | Schätzbare Funktionen | 210 |
| 333 | Projizierte Parameter als schätzbare Funktionen | 212 |
| 334 | Gauß-Markoff-Modell mit nicht vollem Rang und Restriktionen | 222 |
| 34 | Spezielle Gauß-Markoff-Modelle | 227 |
| 341 | Polynommodell | 227 |
| 342 | Varianzanalyse | 230 |
| 343 | Parameterschätzung für die Varianzanalyse mit einer symmetrischen reflexiven generalisierten Inversen | 234 |
| 344 | Kovarianzanalyse | 238 |
| 345 | Gauß-Markoff-Modell für Ausreißer in den Beobachtungen | 239 |
| 35 | Verallgemeinerte lineare Modelle | 241 |
| 351 | Regressionsmodell | 241 |
| 352 | Gemischtes Modell | 244 |
| 353 | Beste lineare erwartungstreue Schätzung im gemischten Modell | 247 |
| 354 | Methode der kleinsten Quadrate und Maximum-Likelihood-Methode für das gemischte Modell | 249 |
| 355 | Modell der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen | 253 |
| 356 | Prädiktion und Filterung | 254 |
| 36 | Schätzung von Varianz- und Kovarianzkomponenten | 259 |
| 361 | Beste invariante quadratische erwartungstreue Schätzung | 259 |
| 362 | Lokal beste Schätzung | 263 |
| 363 | Iterierte Schätzungen | 267 |
| 364 | Beste erwartungstreue Schätzung der Varianz der Gewichtseinheit | 271 |
| 37 | Multivariate Parameterschätzung | 272 |
| 371 | Multivariates Gauß-Markoff-Modell | 272 |
| 372 | Schätzung der Parametervektoren | 274 |
| 373 | Schätzung der Kovarianzmatrix | 276 |
| 374 | Numerische Berechnung der Schätzwerte und unvollständige multivariate Modelle | 281 |
| 375 | Spezielles Modell zur Schätzung von Kovarianzmatrizen und Schätzung von Kovarianzen für stochastische Prozesse | 286 |
| 376 | Multivariates Modell mit Restriktionen | 289 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 4 | Hypothesenprüfung, Bereichsschätzung und Ausreißertest im Gauß-Markoff-Modell | 291 |
| 41 | Verteilungen aufgrund normalverteilter Beobachtungen | 292 |
| 411 | Verteilungen von Funktionen der Residuen im univariaten Modell | 292 |
| 412 | Verteilungen der im multivariaten Modell geschätzten Kovarianzmatrizen | 295 |
| 42 | Test von Hypothesen | 297 |
| 421 | Methode der Hypothesenprüfung und Likelihood-Quotiententest | 297 |
| 422 | Test einer allgemeinen Hypothese im univariaten Gauß-Markoff-Modell | 300 |
| 423 | Spezielle Hypothesen | 305 |
| 424 | Hypothesentest für die Varianz der Gewichtseinheit | 309 |
| 425 | Test einer allgemeinen Hypothese im multivariaten Gauß-Markoff-Modell | 310 |
| 426 | Hypothese der Identität einer Kovarianzmatrix mit einer gegebenen Matrix | 317 |
| 43 | Bereichsschätzung | 319 |
| 431 | Konfidenzintervalle | 319 |
| 432 | Konfidenzintervalle für Parameter, für lineare Funktionen der Parameter und Konfidenzhyperellipsoide | 320 |
| 433 | Konfidenzintervall für die Varianz der Gewichtseinheit | 325 |
| 44 | Ausreißertest | 326 |
| 441 | Hypothesentest für Ausreißer | 326 |
| 442 | Test für einen Ausreißer | 328 |
| 443 | Fraktilwerte für den Ausreißertest | 330 |
| 444 | Zuverlässigkeitsmaße | 332 |
| 5 | Diskriminanzanalyse | 337 |
| 51 | Entscheidungstheoretische Lösung | 338 |
| 511 | Bayes-Strategie | 338 |
| 512 | Diskriminanzfunktionen | 340 |

| | | |
|-----|---|-----|
| 52 | Klassifizierung aufgrund der Normalverteilung | 340 |
| 521 | Bekannte Parameter | 340 |
| 522 | Unbekannte Parameter | 342 |
| | Literatur | 345 |
| | Sachverzeichnis | 361 |