

Jürgen Tietze

# **Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik**

10., verbesserte und aktualisierte Auflage

Mit 500 Abbildungen und 1300 Übungsaufgaben



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> .....	<b>V</b>
<b>Symbolverzeichnis</b> .....	<b>XV</b>
<b>Abkürzungen, Variablennamen, griechisches Alphabet</b> .....	<b>XVI</b>
<b>1 Grundlagen und Hilfsmittel</b> .....	<b>1-1</b>
1.1 Mengen und Aussagen .....	1-1
1.1.1 Mengenbegriff .....	1-1
1.1.2 Spezielle Zahlenmengen .....	1-3
1.1.3 Aussagen und Aussageformen .....	1-5
1.1.4 Verknüpfungen von Aussagen und Aussageformen .....	1-9
1.1.4.1 Konjunktion .....	1-9
1.1.4.2 Disjunktion .....	1-10
1.1.4.3 Negation .....	1-11
1.1.4.4 Zusammengesetzte Aussagen .....	1-11
1.1.5 Folgerung (Implikation) und Äquivalenz .....	1-14
1.1.5.1 Folgerung (Implikation) .....	1-14
1.1.5.2 Äquivalenz .....	1-16
1.1.6 Relationen zwischen Mengen .....	1-17
1.1.6.1 Gleichheit zweier Mengen .....	1-17
1.1.6.2 Teilmengen .....	1-17
1.1.7 Verknüpfungen (Operationen) mit Mengen .....	1-18
1.1.7.1 Durchschnittsmenge .....	1-18
1.1.7.2 Vereinigungsmenge .....	1-18
1.1.7.3 Restmenge (Differenzmenge) .....	1-19
1.1.8 Paarmengen, Produktmengen .....	1-21
1.2 Arithmetik im Bereich der reellen Zahlen .....	1-23
1.2.1 Grundregeln (Axiome) und elementare Rechenregeln in $\mathbb{R}$ .....	1-23
1.2.1.1 Axiome .....	1-23
1.2.1.2 Elementare Rechenregeln für reelle Zahlen ...	1-26
1.2.1.3 Betrag einer Zahl .....	1-31
1.2.1.4 Das Summenzeichen .....	1-32
1.2.1.5 Das Produktzeichen .....	1-35
1.2.1.6 Fakultät und Binomialkoeffizient .....	1-35
1.2.2 Potenzen .....	1-37
1.2.2.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten .....	1-37
1.2.2.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten .....	1-40
1.2.2.3 Potenzen mit rationalen (gebrochenen) Exponenten; Wurzeln .....	1-41

1.2.2.4	Potenzen mit reellen Exponenten .....	1-44
1.2.3	Logarithmen .....	1-46
1.2.3.1	Begriff des Logarithmus .....	1-46
1.2.3.2	Logarithmenbasen .....	1-47
1.2.3.3	Rechenregeln für Logarithmen .....	1-48
1.2.3.4	Logarithmen zu beliebiger Basis .....	1-50
1.2.4	Gleichungen .....	1-51
1.2.4.1	Allgemeines über Gleichungen und deren Lösungen .....	1-51
1.2.4.2	Äquivalenzumformungen .....	1-54
1.2.4.3	Lineare Gleichungen $ax + b = cx + d$ .....	1-58
1.2.4.4	Lineare Gleichungssysteme (LGS) .....	1-59
1.2.4.5	Quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ ....	1-63
1.2.4.6	Gleichungen höheren als zweiten Grades .....	1-67
1.2.4.7	Wurzelgleichungen .....	1-70
1.2.4.8	Exponentialgleichungen .....	1-71
1.2.4.9	Logarithmengleichungen .....	1-72
1.2.4.10	Bruchgleichungen .....	1-73
1.2.5	Ungleichungen .....	1-74
1.2.6	Wo steckt der Fehler? .....	1-78
1.2.6.1	Fehler bei Termumformungen .....	1-78
1.2.6.2	Fehler bei der Lösung von Gleichungen .....	1-80
1.2.6.3	Fehler bei der Lösung von Ungleichungen ....	1-82
<b>2</b>	<b>Funktionen einer unabhängigen Variablen .....</b>	<b>2-1</b>
2.1	Begriff und Darstellung von Funktionen .....	2-1
2.1.1	Funktionsbegriff .....	2-1
2.1.2	Graphische Darstellung von Funktionen .....	2-6
2.1.3	Abschnittsweise definierte Funktionen .....	2-11
2.1.4	Umkehrfunktionen .....	2-14
2.1.5	Implizite Funktionen .....	2-19
2.1.6	Verkettete Funktionen .....	2-20
2.2	Eigenschaften von Funktionen .....	2-22
2.2.1	Beschränkte Funktionen .....	2-22
2.2.2	Monotone Funktionen .....	2-23
2.2.3	Symmetrische Funktionen .....	2-24
2.2.4	Nullstellen von Funktionen .....	2-25
2.3	Elementare Typen von Funktionen .....	2-26
2.3.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome) .....	2-26
2.3.1.1	Grundbegriffe, Horner-Schema .....	2-26
2.3.1.2	Konstante und lineare Funktionen .....	2-28
2.3.1.3	Quadratische Funktionen .....	2-35
2.3.1.4	Nullstellen von Polynomen und Polynomzerlegung .....	2-38
2.3.2	Gebrochen-rationale Funktionen .....	2-41
2.3.3	Algebraische Funktionen (Wurzelfunktionen) .....	2-43

2.3.4	Exponentialfunktionen	2-46
2.3.5	Logarithmusfunktionen	2-48
2.3.6	Trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen, Winkelfunktionen)	2-49
2.4	Iterative Gleichungslösung und Nullstellenbestimmung (Regula falsi)	2-55
2.5	Beispiele ökonomischer Funktionen	2-59
<b>3</b>	<b>Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen</b>	3-1
3.1	Begriff von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	3-1
3.2	Darstellung einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen	3-2
3.3	Homogenität von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	3-13
<b>4</b>	<b>Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen</b>	4-1
4.1	Der Grenzwertbegriff	4-1
4.1.1	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow x_0$	4-2
4.1.2	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow \infty$ (bzw. $x \rightarrow -\infty$ )	4-6
4.2	Grenzwerte spezieller Funktionen	4-13
4.3	Die Grenzwertsätze und ihre Anwendungen	4-15
4.4	Der Stetigkeitsbegriff	4-20
4.5	Unstetigkeitstypen	4-22
4.6	Stetigkeitsanalyse	4-24
4.7	Stetigkeit ökonomischer Funktionen	4-27
4.8	Asymptoten	4-30
<b>5</b>	<b>Differentialrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen – Grundlagen und Technik</b>	5-1
5.1	Grundlagen der Differentialrechnung	5-1
5.1.1	Problemstellung	5-1
5.1.2	Durchschnittliche Funktionssteigung (Sekantensteigung) und Differenzenquotient	5-2
5.1.3	Steigung und Ableitung einer Funktion (Differentialquotient)	5-3
5.1.4	Differenzierbarkeit und Stetigkeit	5-7
5.2	Technik des Differenzierens	5-9
5.2.1	Die Ableitung der Grundfunktionen	5-9
5.2.1.1	Ableitung der konstanten Funktion $f(x) = C$	5-9
5.2.1.2	Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = x^n$	5-10
5.2.1.3	Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$	5-12
5.2.1.4	Ableitung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$	5-12
5.2.2	Ableitungsregeln	5-14
5.2.2.1	Faktorregel	5-14
5.2.2.2	Summenregel	5-15
5.2.2.3	Produktregel	5-16

5.2.2.4	Quotientenregel .....	5-17
5.2.2.5	Kettenregel .....	5-19
5.2.3	Ergänzungen zur Ableitungstechnik .....	5-23
5.2.3.1	Ableitung der Umkehrfunktion .....	5-23
5.2.3.2	Ableitung allgemeiner Exponential- und Logarithmusfunktionen .....	5-24
5.2.3.3	Logarithmische Ableitung .....	5-27
5.2.4	Höhere Ableitungen .....	5-28
5.2.5	Zusammenfassung der wichtigsten Differentiationsregeln .....	5-30
5.3	Grenzwerte bei unbestimmten Ausdrücken – Regeln von de L'Hôpital .....	5-31
5.4	Newton-Verfahren zur näherungsweisen Ermittlung von Nullstellen einer Funktion .....	5-39
<b>6</b>	<b>Anwendungen der Differentialrechnung bei Funktionen mit einer unabhängigen Variablen .....</b>	<b>6-1</b>
6.1	Zur ökonomischen Interpretation der ersten Ableitung .....	6-1
6.1.1	Das Differential einer Funktion .....	6-1
6.1.2	Die Interpretation der 1. Ableitung als (ökonomische) Grenzfunktion .....	6-4
6.1.2.1	Grenzkosten .....	6-6
6.1.2.2	Grenzerlös (Grenzumsatz, Grenzausgaben) ...	6-7
6.1.2.3	Grenzproduktivität (Grenzertrag) .....	6-9
6.1.2.4	Grenzgewinn .....	6-10
6.1.2.5	Marginale Konsumquote .....	6-12
6.1.2.6	Marginale Sparquote .....	6-12
6.1.2.7	Grenzrate der Substitution .....	6-13
6.1.2.8	Grenzfunktion und Durchschnittsfunktion ....	6-14
6.2	Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung von Funktionen .....	6-18
6.2.1	Monotonie- und Krümmungsverhalten .....	6-18
6.2.2	Extremwerte .....	6-22
6.2.3	Wendepunkte .....	6-26
6.2.4	Kurvendiskussion .....	6-28
6.2.5	Extremwerte bei nichtdifferenzierbaren Funktionen ....	6-33
6.3	Die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Probleme .....	6-36
6.3.1	Beschreibung ökonomischer Prozesse mit Hilfe von Ableitungen .....	6-36
6.3.1.1	Beschreibung des Wachstumsverhaltens ökonomischer Funktionen .....	6-37
6.3.1.2	Konstruktion ökonomischer Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften .....	6-40
6.3.2	Analyse und Optimierung ökonomischer Funktionen ...	6-42
6.3.2.1	Fahrstrahlanalyse .....	6-43
6.3.2.2	Diskussion ökonomischer Funktionen .....	6-46

6.3.2.3	Gewinnmaximierung .....	6-48
6.3.2.4	Gewinnmaximierung bei doppelt-geknickter Preis-Absatz-Funktion .....	6-55
6.3.2.5	Optimale Lagerhaltung .....	6-57
6.3.3	Die Elastizität ökonomischer Funktionen .....	6-67
6.3.3.1	Änderungen von Funktionen .....	6-67
6.3.3.2	Begriff, Bedeutung und Berechnung der Elastizität von Funktionen .....	6-69
6.3.3.3	Elastizität ökonomischer Funktionen .....	6-75
6.3.3.4	Graphische Ermittlung der Elastizität .....	6-82
6.3.4	Überprüfung ökonomischer Gesetzmäßigkeiten mit Hilfe der Differentialrechnung .....	6-86

## **7 Differentialrechnung bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen .....**

7.1	Grundlagen .....	7-1
7.1.1	Begriff und Berechnung von partiellen Ableitungen ....	7-1
7.1.2	Ökonomische Interpretation partieller Ableitungen ....	7-7
7.1.3	Partielle Ableitung höherer Ordnung .....	7-9
7.1.4	Kennzeichnung von Monotonie und Krümmung durch partielle Ableitungen .....	7-10
7.1.5	Partielles und vollständiges (totales) Differential .....	7-12
7.1.6	Kettenregel, totale Ableitung .....	7-15
7.1.7	Ableitung impliziter Funktionen .....	7-19
7.2	Extrema bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	7-23
7.2.1	Relative Extrema ohne Nebenbedingungen .....	7-23
7.2.2	Extremwerte unter Nebenbedingungen .....	7-25
7.2.2.1	Problemstellung .....	7-25
7.2.2.2	Variablensubstitution .....	7-27
7.2.2.3	Lagrange-Methode .....	7-28
7.3	Beispiele für die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen .....	7-31
7.3.1	Partielle Elastizitäten .....	7-32
7.3.1.1	Begriff der partiellen Elastizität .....	7-32
7.3.1.2	Die Eulersche Homogenitätsrelation .....	7-33
7.3.1.3	Elastizität homogener Funktionen .....	7-34
7.3.1.4	Faktorentlohnung und Verteilung des Produktes .....	7-37
7.3.2	Ökonomische Beispiele für relative Extrema (ohne Nebenbedingungen) .....	7-43
7.3.2.1	Optimaler Faktoreinsatz in der Produktion ....	7-43
7.3.2.2	Gewinnmaximierung von Mehrproduktunternehmen .....	7-47
7.3.2.3	Gewinnmaximierung bei räumlicher Preisdifferenzierung .....	7-52

7.3.2.4	Die Methode der kleinsten Quadrate .....	7-56
7.3.3	Ökonomische Beispiele für Extrema unter Nebenbedingungen .....	7-59
7.3.3.1	Minimalkostenkombination .....	7-59
7.3.3.2	Expansionspfad, Faktornachfrage- und Gesamtkostenfunktion .....	7-66
7.3.3.3	Nutzenmaximierung und Haushaltsoptimum ...	7-70
7.3.3.4	Nutzenmaximale Güternachfrage- und Konsumfunktionen .....	7-77
<b>8</b>	<b>Einführung in die Integralrechnung .....</b>	<b>8-1</b>
8.1	Das unbestimmte Integral .....	8-1
8.1.1	Stammfunktion und unbestimmtes Integral .....	8-1
8.1.2	Grundintegrale .....	8-4
8.1.3	Elementare Rechenregeln für das unbestimmte Integral	8-5
8.2	Das bestimmte Integral .....	8-7
8.2.1	Das Flächeninhaltsproblem und der Begriff des bestimmten Integrals .....	8-7
8.2.2	Beispiel zur elementaren Berechnung eines bestimmten Integrals .....	8-10
8.2.3	Elementare Eigenschaften des bestimmten Integrals ...	8-11
8.3	Beziehungen zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral	8-12
8.3.1	Integralfunktion .....	8-12
8.3.2	Der 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	8-13
8.3.3	Der 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	8-15
8.3.4	Flächeninhaltsberechnung .....	8-17
8.4	Spezielle Integrationstechniken .....	8-19
8.4.1	Partielle Integration .....	8-19
8.4.2	Integration durch Substitution .....	8-21
8.5	Ökonomische Anwendungen der Integralrechnung .....	8-23
8.5.1	Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktionen .....	8-23
8.5.2	Die Konsumentenrente .....	8-26
8.5.3	Die Produzentenrente .....	8-28
8.5.4	Kontinuierliche Zahlungsströme .....	8-29
8.5.5	Kapitalstock und Investitionen einer Volkswirtschaft ...	8-33
8.5.6	Optimale Nutzungsdauer von Investitionen .....	8-34
8.6	Elementare Differentialgleichungen .....	8-38
8.6.1	Einleitung .....	8-38
8.6.2	Lösung von Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen .....	8-39
8.6.3	Ökonomische Anwendungen separabler Differentialgleichungen .....	8-42
8.6.3.1	Exponentielles Wachstum .....	8-42
8.6.3.2	Funktionen mit vorgegebener Elastizität .....	8-42
8.6.3.3	Neoklassisches Wachstumsmodell nach Solow .	8-44

<b>9 Einführung in die Lineare Algebra</b> .....	9-1
9.1 Matrizen und Vektoren .....	9-1
9.1.1 Grundbegriffe der Matrizenrechnung .....	9-1
9.1.2 Spezielle Matrizen und Vektoren .....	9-6
9.1.3 Operationen mit Matrizen .....	9-7
9.1.3.1 Addition von Matrizen .....	9-7
9.1.3.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalarfaktor .....	9-9
9.1.3.3 Die skalare Multiplikation zweier Vektoren (Skalarprodukt) .....	9-11
9.1.3.4 Multiplikation von Matrizen .....	9-12
9.1.4 Die inverse Matrix .....	9-19
9.1.5 Ökonomisches Anwendungsbeispiel (Input-Output-Analyse) .....	9-21
9.2 Lineare Gleichungssysteme (LGS) .....	9-26
9.2.1 Grundbegriffe .....	9-26
9.2.2 Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme – Gaußscher Algorithmus .....	9-28
9.2.3 Pivotisieren .....	9-35
9.2.4 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme .....	9-40
9.2.5 Berechnung der Inversen einer Matrix .....	9-45
9.2.6 Ökonomische Anwendungsbeispiele für lineare Gleichungssysteme .....	9-48
9.2.6.1 Teilebedarfsrechnung, Stücklistenauflösung ...	9-48
9.2.6.2 Innerbetriebliche Leistungsverrechnung .....	9-50
<b>10 Lineare Optimierung (LO)</b> .....	10-1
10.1 Grundlagen und graphische Lösungsmethode .....	10-1
10.1.1 Ein Problem der Produktionsplanung .....	10-1
10.1.2 Graphische Lösung des Produktionsplanungsproblems ..	10-2
10.1.3 Ein Diät-Problem .....	10-4
10.1.4 Graphische Lösung des Diät-Problems .....	10-5
10.1.5 Sonderfälle bei graphischer Lösung .....	10-7
10.1.6 Graphische Lösung von LO-Problemen – Zusammenfassung .....	10-10
10.2 Simplexverfahren .....	10-12
10.2.1 Mathematisches Modell des allgemeinen LO-Problems .	10-12
10.2.2 Grundidee des Simplexverfahrens .....	10-14
10.2.3 Einführung von Schlupfvariablen .....	10-14
10.2.4 Eckpunkte und Basislösungen .....	10-15
10.2.5 Optimalitätskriterium .....	10-17
10.2.6 Engpaßbedingung .....	10-19
10.2.7 Simplexverfahren im Standard-Maximum-Fall – Zusammenfassung .....	10-20
10.2.8 Beispiel zum Simplexverfahren (Standard-Maximum-Problem) .....	10-21



10.3	Zweiphasenmethode zur Lösung beliebiger LO-Probleme .....	10-24
10.4	Sonderfälle bei LO-Problemen .....	10-31
10.4.1	Keine zulässige Lösung .....	10-31
10.4.2	Keine endliche optimale Lösung (unbeschränkte Lösung) .....	10-32
10.4.3	Degeneration (Entartung) .....	10-32
10.4.4	Mehrdeutige optimale Lösungen .....	10-34
10.4.5	Fehlen von Nichtnegativitätsbedingungen .....	10-36
10.4.6	Ablaufdiagramm des Simplexverfahrens im allgemeinen Fall .....	10-37
10.5	Die ökonomische Interpretation des optimalen Simplextableaus .....	10-38
10.5.1	Produktionsplanungsproblem .....	10-38
10.5.1.1	Problemformulierung, Einführung von Einheiten .....	10-38
10.5.1.2	Optimaltableau und optimale Basislösung .....	10-40
10.5.1.3	Deutung der Zielfunktionskoeffizienten .....	10-41
10.5.1.4	Deutung der inneren Koeffizienten .....	10-42
10.5.1.5	Zusammenfassung .....	10-44
10.5.2	Diätproblem .....	10-44
10.6	Dualität .....	10-46
10.6.1	Das duale LO-Problem .....	10-46
10.6.2	Dualitätssätze .....	10-48
10.7	Ökonomische Interpretation des Dualproblems .....	10-51
10.7.1	Dual eines Produktionsplanungsproblems .....	10-52
10.7.2	Dual eines Diätproblems .....	10-53
<b>11</b>	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>11-1</b>
<b>12</b>	<b>Sachwortverzeichnis .....</b>	<b>12-1</b>