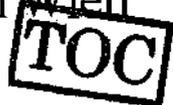


Statistik- Taschenbuch

Von
Professor Dr. Karl Bosch

R. Oldenbourg Verlag München Wien



Inhaltsverzeichnis

Votwort	XXV
Kapitel I : Beschreibende (deskriptive) Statistik	1
1. Eindimensionale Darstellungen	1
1.1. Merkmalstypen.	1
1.2. Häufigkeitsverteilungen bei diskreten Merkmalen	4
1.2.1. Absolute und relative Häufigkeiten.	4
1.2.2. Strichliste und Häufigkeitstabelle.	5
1.2.3. Graphische Darstellungen.	6
1.2.4. Die empirische Verteilungsfunktion.	10
1.3. Häufigkeitsverteilungen bei Klassenbildungen.	11
1.3.1. Klasseneinteilung.	11
1.3.2. Häufigkeiten bei Klassenbildungen.	12
1.3.3. Histogramme bei Klassenbildungen.	12
1.3.4. Empirische Verteilungsfunktion bei einer Klassenbildung	14
1.4. Lageparameter von Häufigkeitsverteilungen.	14
1.4.1. Der Modalwert (häufigster Wert).	15
1.4.2. Das arithmetische Mittel (Mittelwert).	15
1.4.3. Gewichtete (gewogene) arithmetische Mittel.	17
1.4.4. Der Median (Zentralwert).	18
1.4.5. Quantile.	22
1.4.6. Das geometrische Mittel.	24
1.4.7. Gewichtete (gewogene) geometrische Mittel.	25
1.4.8. Das harmonische Mittel.	26
1.4.9. Gewichtete harmonische Mittel.	27
1.4.10. Vergleich der verschiedenen Mittelwerte.	27
1.5. Streuungsmaße (Streuungsparameter) von Häufigkeitsverteilungen.	28
1.5.1. Die Spannweite.	28
1.5.2. Der Quartilsabstand und Quantilsabstände.	28
1.5.3. Mittlere Abstände.	29
1.5.4. Varianz und Standardabweichung.	30
1.5.5. Der Variationskoeffizient.	33
1.5.6. Vergleich mittlerer Abstand und Standardabweichung	33
1.5.7. Momente einer Häufigkeitsverteilung.	34
1.5.8. Die Schiefe einer Häufigkeitsverteilung.	34
1.5.9. Der Exzeß einer Häufigkeitsverteilung.	35

1.6.	Konzentrationsmaße	35
1.6.1.	Die Lorenzkurve	36
1.6.1.1.	Die Lorenzkurve bei Einzelwerten (einer Beobachtungsreihe)	36
1.6.1.2.	Die Lorenzkurve bei Häufigkeitsverteilungen	39
1.6.1.3.	Die Lorenzkurve bei Klasseneinteilungen	39
1.6.2.	Der Gini-Koeffizient (das Lorenzsche Konzentrationsmaß)	40
2.	Zweidimensionale Darstellungen	41
2.1.	Zweidimensionale Häufigkeitsverteilungen	42
2.1.1.	Zweidimensionale Beobachtungsreihen	42
2.1.2.	Häufigkeitstabellen (Kontingenztafeln)	44
2.1.3.	Bedingte Häufigkeitsverteilungen	48
2.2.	Korrelationsrechnung	51
2.2.1.	Kovarianz und Korrelationskoeffizient	52
2.2.2.	Der Rangkorrelationskoeffizient von Spearman	56
2.2.2.1.	Bestimmung der Rangzahlen	57
2.2.2.2.	Allgemeine Formel für den Rangkorrelationskoeffizienten	58
2.2.2.3.	Praktische Berechnung von r_s bei Rangzahlen ohne Bindungen	60
2.2.2.4.	Formel beim Auftreten von Bindungen	60
2.2.3.	Der Rangkorrelationskoeffizient von Kendall (Kendalls r)	62
2.2.3.1.	Kendalls r bei Rangzahlen ohne Bindungen	63
2.2.3.2.	Kendalls r^* bei Bindungen in der y -Reihe	65
2.2.3.3.	Kendalls r^{**} bei Bindungen in beiden Reihen	66
2.3.	Regressionsrechnung	70
2.3.1.	Die Regressionsgerade von y bezüglich x	70
2.3.2.	Die Regressionsgerade von x bzgl. y	75
2.3.3.	Regressionsgerade durch einen festen (vorgegebenen) Punkt	77
2.3.4.	Regressionspolynome	78
2.3.5.	Regressionsparabel	79
2.3.6.	Regressionspolynome durch einen vorgegebenen Punkt	80
2.3.7.	Beliebige von Parametern abhängige Regressionsfunktionen	81
2.3.8.	Transformationen zur Berechnung von Regressionsfunktionen	82
Kapitel II :	Wahrscheinlichkeiten	85
1.	Zufallsexperimente und zufällige Ereignisse	85
2.	Relative Häufigkeiten von Ereignissen	88
3.	Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen	89
3.1.	Die historische Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs	89

3.2.	Wahrscheinlichkeiten	91
3.2.1.	Axiomatische Definition einer Wahrscheinlichkeit	91
3.2.2.	Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Laplace	94
3.2.3.	Kombinatorik	95
3.2.3.1.	Produktregel der Kombinatorik (das allgemeine Zählprinzip)	96
3.2.3.2.	Anordnungsmöglichkeiten (Permutationen).	96
3.2.3.3.	Auswahlmöglichkeiten unter Berücksichtigung der Reihenfolge	97
3.2.3.4.	Auswahlmöglichkeiten ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	98
3.2.3.5.	Zusammenstellung der Formeln aus der Kombinatorik	99
3.2.3.6.	Urnenmodelle	100
3.2.4.	Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Simulationen	103
3.2.4.1.	Geometrische Wahrscheinlichkeiten auf Intervallen	103
3.2.4.2.	Erzeugung von Zufallszahlen.	104
3.2.4.3.	Geometrische Wahrscheinlichkeiten in der Ebene	105
3.2.4.4.	Fächenberechnungen mit Hilfe von Simulationen	106
4.	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	107
4.1.	Bedingte relative Häufigkeiten	108
4.2.	Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit	109
4.3.	Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit - Bayessche Formel	112
5.	Unabhängige Ereignisse	115
5.1.	Unabhängigkeit bei zwei Ereignissen	115
5.2.	Unabhängigkeit bei mehreren Ereignissen.	116
6.	Unabhängige mehrstufige Zufallsexperimente	117
6.1.	Unabhängige zweistufige Zufallsexperimente.	117
6.2.	Unabhängige mehrstufige Zufallsexperimente.	118
6.3.	Unabhängige Wiederholungen eines Zufallexperiments	119
6.4.	Spezielle Verteilungen	120
6.4.1.	Die Binomialverteilung	120
6.4.2.	Die geometrische Verteilung	123
7.	Das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen	123
 Kapitel III : Diskrete Zufallsvariable		 128
1.	Definition einer Zufallsvariablen	128
2.	Eindimensionale diskrete Zufallsvariable	128
2.1.	Verteilung einer diskreten Zufallsvariablen.	128
2.2.	Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen	131
2.3.	Lageparameter diskreter Zufallsvariablen	133
2.3.1.	Modalwert einer diskreten Zufallsvariablen	133

Inhaltsverzeichnis

2.3.2.	Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen	133
2.3.3.	Der Median einer diskreten Zufallsvariablen	139
2.3.4.	Quantile einer diskreten Zufallsvariablen	141
2.4.	Streuungsparameter.	142
2.4.1.	Varianz und Standardabweichung	143
2.4.2.	Die Tschebyscheffsche Ungleichung	145
2.4.3.	Momente einer diskreten Zufallsvariablen	146
2.4.4.	Der Variationskoeffizient einer diskreten Zufallsvariablen	147
2.4.5.	Die Schiefe der Verteilung einer diskreten Zufallsvariablen	147
2.4.6.	Der Exzeß der Verteilung einer diskreten Zufallsvariablen	147
3.	Paare diskreter Zufallsvariabler.	148
3.1.	Die gemeinsame Verteilung	148
3.2.	Die gemeinsame Verteilungsfunktion.	150
3.3.	Bedingte Verteilungen und bedingte Erwartungswerte	151
3.4.	Unabhängige diskrete Zufallsvariable.	152
3.5.	Funktionen zweier diskreter Zufallsvariabler.	153
3.5.1.	Das Produkt zweier diskreter Zufallsvariabler.	154
3.5.2.	Die Summe zweier diskreter Zufallsvariabler.	155
3.6.	Kovarianz und Korrelationskoeffizient	156
3.7.	Die Regressionsgerade.	159
3.8.	Regressionsfunktionen.	161
4.	Mehrdimensionale diskrete Zufallsvariable.	161
5.	Erzeugende Funktionen.	162
6.	Charakteristische Funktionen.	165
7.	Spezielle diskrete Verteilungen	168
7.1.	Die gleichmäßige Verteilung.	168
7.2.	Die Binomialverteilung.	169
7.3.	Die geometrische Verteilung	176
7.4.	Die negative Binomialverteilung	179
7.5.	Die hypergeometrische Verteilung.	181
7.6.	Die Poisson-Verteilung	184
Kapitel IV:	Stetige Zufallsvariable.	191
1.	Eindimensionale stetige Zufallsvariable.	191
1.1.	Dichte einer stetigen Zufallsvariablen.	191
1.2.	Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen	193
1.3.	Lageparameter einer stetigen Zufallsvariablen	195
1.3.1.	Der Modalwert einer stetigen Zufallsvariablen.	195
1.3.2.	Der Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen	196

1.3.3.	Der Mediän einer stetigen Zufallsvariablen.	203
1.3.4.	Quantile einer stetigen Zufallsvariablen.	204
1.4.	Streuungsparameter stetiger Zufallsvariabler.	206
1.4.1;	Varianz und Standardabweichung.	206
1.4.2.	Die Tschebyscheffsche Ungleichung.	208
1.4.3.	Momente einer stetigen Zufallsvariablen.	209
1.4.4.	Der Variationskoeffizient einer stetigen Verteilung	209
1.4.5.	Die Schiefe einer stetigen Verteilung	210
1.4.6.	Der Exzeß einer stetigen Verteilung	210
1.5.	Gestutzte Verteilungen.	210
1.6.	Mischverteilungen.	213
2.	Zweidimensionale stetige Zufallsvariable.	216
2.1.	Die gemeinsame Dichte.	216
2.2.	Die gemeinsame Verteilungsfunktion.	219
2.3.	Unabhängige stetige Zufallsvariable.	222
2.4.	Bedingte Dichten und bedingte Erwartungswerte	223
2.5.	Funktionen einer stetigen zweidimensionalen Zufallsvariablen	229
2.5.1.	Das Produkt zweier stetiger Zufallsvariabler.	229
2.5.2.	Die Summe zweier stetiger Zufallsvariabler.	231
2.5.3.	Der Quotient zweier stetiger Zufallsvariabler.	234
2.5.4.	Zweidimensionale Funktionen.	236
2.5.5.	Die Differenz zweier stetiger Zufallsvariabler.	237
2.6.	Kovarianz und Korrelationskoeffizient	237
2.7.	Die Regressionsgerade zweier stetiger Zufallsvariabler	241
3.	Mehrdimensionale stetige Zufallsvariable.	242
4.	Charakteristische Funktionen	245
5.	Spezielle stetige Verteilungen.	248
5.1.	Die gleichmäßige Verteilung.	248
5.2.	Die Exponentialverteilung	252
5.3.	Die Gammaverteilung	257
5.4.	Die Erlang-Verteilung.	259
5.5.	Allgemeine Lebensdauervertelungen.	260
5.6.	Die Weibull-Verteilung	261
5.7.	Normalverteilungen.	262
5.7.1.	Die Standard-Normalverteilung - $N(0;1)$ -Verteilung	262
5.7.2.	Die allgemeine Normalverteilung.	266
5.7.3.	Die gestutzte Normalverteilung	270 ^v
5.7.4.	Die logarithmische Normalverteilung	275
5.7.5.	Die zweidimensionale Normalverteilung	278
5.7.6.	Die n - dimensionale Normalverteilung	284
5.8.	Testverteilungen.	287

5.8.1.	Die Chi-Quadrat-Verteilung	287
5.8.2.	Die t-Verteilung	291
5.8.3.	Die F-Verteilung	293
Kapitel V : Allgemeine Zufallsvariable		299
1.	Eindimensionale Zufallsvariable	299
1.1.	Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen	299
1.2.	Kenngrößen einer Zufallsvariablen	303
1.2.1.	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	304
1.2.2.	Die Jensensche Ungleichung	309
1.2.3.	Die Tschebyscheffsche Ungleichung	311
1.2.4.	Momente einer Zufallsvariablen	312
1.2.5.	Der Median einer Zufallsvariablen	312
1.2.6.	Quantile einer Zufallsvariablen	313
1.2.7.	Charakteristische Funktionen	313
2.	Zweidimensionale beliebige Zufallsvariable	315
2.1.	Die gemeinsame Verteilungsfunktion	315
2.2.	Unabhängige Zufallsvariable	317
2.3.	Funktionen zweier Zufallsvariablen	317
2.3.1.	Das Produkt zweier Zufallsvariablen	318
2.3.2.	Die Summe zweier Zufallsvariablen	319
2.4.	Kovarianz und Korrelationskoeffizient	319
3.	Mehrdimensionale Zufallsvariable	322
Kapitel VI : Grenzwertsätze		325
1.	Das schwache Gesetz der großen Zahlen	325
2.	Das starke Gesetz der großen Zahlen	329
3.	Der zentrale Grenzwertsatz	332
Kapitel VII : Statistische Methoden (Schlußweisen)		337
1.	Definition einer Stichprobenfunktion (Statistik)	338
2.	Punkt-Schätzung für einen Parameter	339
2.1.	Allgemeine Schätzfunktionen	339
2.2.	Erwartungstreue (unverzerrte) Schätzfunktionen	340
2.3.	Die Verzerrung (der Bias) einer Schätzfunktion	340
2.4.	Konsistente Schätzfunktionen	341
2.5.	Wirksamste (effiziente) Schätzfunktionen	342

2.6.	Die Ungleichung von Rao - Cramer	342
2.7.	Maximum-Likelihood-Schätzung	346
2.7.1.	Die Likelihood-Funktion einer diskreten Verteilung	346
2.7.2.	Die Likelihood-Funktion einer stetigen Verteilung	346
2.7.3.	Das Maximum-Likelihood-Prinzip	347
2.7.4.	Eigenschaften der Maximum-Likelihood-Schätzungen	349
2.8.	Die Momentenmethode	350
2.9.	Kleinste-Quadrate-Schätzer	351
2.10.	Schätzung einer unbekanntem Verteilungsfunktion	351
3.	Konfidenzintervalle für einen Parameter	351
3.1.	Allgemeine Konfidenzintervalle	351
3.2.	Konfidenzintervalle nach Clopper-Pearson im stetigen Fall	353
3.3.	Konfidenzintervalle nach Clopper-Pearson im diskreten Fall	355
3.4.	Konfidenzintervalle bei großem Stichprobenumfang n	357
3.4.1.	Konfidenzintervalle bei regulären Maximum-Likelihood-Schätzungen	357
3.4.2.	Allgemeine asymptotische Konfidenzintervalle	358
3.5.	Konfidenzintervalle für die Differenz zweier Parameter	359
4.	Konfidenzbereiche	360
4.1.	Konfidenzbereiche für ein- oder mehrdimensionale Parameter	360
4.2.	Konfidenzstreifen für eine stetige Verteilungsfunktion	361
5.	Parametertests	362
5.1.	Test eines einzigen Parameters	362
5.1.1.	Nullhypothesen und Alternativen	362
5.1.2.	Testdurchführung	363
5.1.3.	Irrtumswahrscheinlichkeiten	363
5.1.4.	Gütefunktion und Operationscharakteristik	364
5.1.5.	Interpretation der Entscheidungsregeln	367
5.1.6.	Aufstellung der Nullhypothese	367
5.1.7.	Bestimmung der kritischen Grenzen	367
5.2.	Test auf eine bestimmte Differenz zweier Parameter (Zweistichproben-Tests)	369
fi.	Anpassungstests	370
fi.L.	Chi-Quadrat-Anpassungstests	371
fi. 1.1.	Der Chi-Quadrat-Anpassungstest für die Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_r einer Polynomial Verteilung	371
6.1.2.	Der Chi-Quadrat-Anpassungstest für eine beliebige Verteilung	374
6.2.	Kolmogorow-Smirnow-Einstichproben-Test	377
fi.3.	Vergleich des Kolmogorow-Smirnow-Tests mit dem Chi-Quadrat-Test	383

7.	Unabhängigkeits- und Homogenitätstests - Kontingenztafeln	384
7.1.	Der Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest	384
7.2.	Der exakte Test von Fisher bei Vierfeldertafeln	388
7.3.	Der Chi-Quadrat-Homogenitätstest - Test auf Gleichheit mehrerer Verteilungen.	391
7.4.	Der Kolmogorow-Smirnow-Zweistichproben-Test	394

Kapitel VIII : Statistische Methoden bei speziellen Parametern und Verteilungen 401

1.	Erwartungswerte	401
1.1.	Schätzung eines beliebigen Erwartungswerts	401
1.1.1.	Schätzung aus einer einfachen (unabhängigen) Stichprobe	402
1.1.2.	Schätzung aus einer unabhängigen Stichprobe mit verschiedenen bekannten Varianzen	403
1.1.3.	Schätzung aus einer abhängigen Stichprobe mit gleichen Varianzen und identischen Korrelationskoeffizienten	405
1.2.	Konfidenzintervalle für den Erwartungswert μ	405
1.2.1.	Konfidenzintervalle für β bei bekannter Varianz σ^2	406
1.2.2.	Konfidenzintervalle für β bei unbekannter Varianz σ^2	408
1.3.	Test eines Erwartungswertes β	409
1.3.1.	Test eines Erwartungswertes β bei bekannter Varianz σ^2	410
1.3.2.	Test eines Erwartungswertes β bei unbekannter Varianz σ^2	410
1.4.	Vergleich zweier Erwartungswerte	411
1.4.1.	Vergleich bei verbundenen Stichproben	411
1.4.1.1.	Konfidenzintervalle bei verbundenen Stichproben	412
1.4.1.2.	Tests bei verbundenen Stichproben	413
1.4.2.	Vergleich bei nichtverbundenen Stichproben	413
1.4.2.1.	Vergleich der Erwartungswerte bei bekannten Varianzen	414
1.4.2.2.	Vergleich der Erwartungswerte bei unbekanntem, aber gleichen Varianzen	415
1.4.2.3.	Vergleich der Erwartungswerte bei unbekanntem, aber ungleichen Varianzen	417
1.5.	Vergleich mehrerer Erwartungswerte	419
2.	Varianzen und Standardabweichungen	419
2.1.	Schätzung einer beliebigen Varianz	419
2.1.1.	Schätzung der Varianz bei bekanntem Erwartungswert	420
2.1.2.	Schätzung der Varianz bei unbekanntem Erwartungswert	421
2.2.	Schätzung der Standardabweichung	425
2.3.	Konfidenzintervalle für eine Varianz	425
2.3.1.	Konfidenzintervalle für die Varianz einer Normalverteilung bei bekanntem Erwartungswert	426

2.3.2.	Konfidenzintervalle für die Varianz einer Normalverteilung bei unbekanntem Erwartungswert	427
2.3.3.	Konfidenzintervalle für die Varianz bei beliebigen Verteilungen und großem Stichprobenumfang	428
2.4.	Konfidenzintervalle für die Standardabweichung	429
2.5.	Test der Varianz	430
2.5.1.	Test bei Normalverteilungen und bekanntem Erwartungswert	431
2.5.2.	Test bei Normalverteilungen und unbekanntem Erwartungswert	431
2.5.3.	Test der Varianz bei beliebigen Verteilungen und • großem Stichprobenumfang	434
2.6.	Vergleich der Varianzen zweier unabhängiger normalverteilter Zufallsvariabler.	435
2.6.1.	Konfidenzintervalle für den Quotienten $C\sqrt{<^Y$	436
2.6.2.	Test des Quotienten $<r\sqrt{<T\$	437
2.7.	Test auf Gleichheit der Varianzen von m Normalverteilungen (Bartlett-Test).	438
3.	Normalverteilungen	439
3.1.	Maximum-Likelihood-Schätzungen	440
3.2.	Die wirksamsten Schätzfunktionen	441
3.2.1.	Effizienz der Schätzfunktion X für β	441
3.2.2.	Effizienz der Schätzfunktion $T_n = i 52 (X; - \wedge)^2$ für $(T^2$	442
3.3.	Die Verteilung der Zufallsvariablen $i \pounds (X; - \beta)^2$	443
3.4.	Asymptotische Effizienz von S^2	443
3.5.	Schätzung der Standardabweichung	444
3.6.	Test auf Normalverteilung	447
4.	Wahrscheinlichkeiten - Binomialverteilungen	448
4.1.	Schätzung einer Wahrscheinlichkeit	448
4.2.	Die Maximum-Likelihood-Schätzung einer Wahrscheinlichkeit	449
4.3.	Konfidenzintervalle für eine Wahrscheinlichkeit p	450
4.3.1.	Konfidenzintervalle für p bei großem Stichprobenumfang	450
4.3.2.	Konfidenzintervalle für p bei kleinem Stichprobenumfang.	452
4.4.	Test einer Wahrscheinlichkeit	454
4.4.1.	Test von p bei großem Stichprobenumfang	454
4.4.2.	Test von p bei kleinem Stichprobenumfang	455
4.5.	Vergleich zweier Wahrscheinlichkeiten	456
4.5.1.	Test auf Gleichheit zweier Wahrscheinlichkeiten bei beliebigen Stichprobenumfängen.	456
4.5.2.	Test auf Gleichheit zweier Wahrscheinlichkeiten bei großen Stichprobenumfängen.	457

4.5.3.	Konfidenzintervalle für die Differenz zweier Wahrscheinlichkeiten bei großen Stichprobenumfängen.	458
4.6.	Test auf Gleichheit mehrerer Wahrscheinlichkeiten	459
4.7.	Test auf Binomialverteilung	459
5.	Poisson-Verteilung	461
5.1.	Schätzung des Parameters λ	461
5.1.1.	Schätzung durch das Stichprobenmittel \bar{x}	461
5.1.2.	Schätzung durch die Stichprobenvarianz s^2	461
5.1.3.	Maximum-Likelihood-Schätzung	463
5.2!	Konfidenzintervalle für den Parameter.	463
5.2.1.	Konfidenzintervalle bei großem Stichprobenumfang	463
5.2.2.	Konfidenzintervalle aus einer einzigen Realisierung	464
5.3.	Test des Parameters λ	466
5.3.1.	Test von λ bei großem Stichprobenumfang.	466
5.3.2.	Test von λ aus einer einzigen Realisierung.	466
5.4.	Test auf Poisson-Verteilung	468
5.5.	Test auf Gleichheit mehrerer Poisson-Verteilungen	469
6.	Exponentialverteilung	470
6.1.	Parameterschätzung	471
6.2.	Maximum-Likelihood-Schätzung	472
6.3.	Konfidenzintervalle für den Parameter.	472
6.4.	Test des Parameters.	473
6.5.	Test auf Exponentialverteilung	474
7.	Die gleichmäßige Verteilung	475
7.1.	Die gleichmäßige Verteilung in $[0; \theta]$	475
7.1.1.	Schätzung von θ durch das Stichprobenmittel \bar{x}	475
7.1.2.	Maximum-Likelihood-Schätzung des Parameters θ	476
7.1.3.	Konfidenzintervalle für den Parameter θ	478
7.1.4.	Test des Parameters θ	479
7.2.	Die gleichmäßige Verteilung in $[a; b]$	479
7.2.1.	Maximum-Likelihood-Schätzungen der Parameter a und b	480
7.2.2.	Test auf gleichmäßige Verteilung.	482
8.	Kovarianz und Korrelationskoeffizient	482
8.1.	Schätzung der Parameter.	483
8.1.1.	Schätzung der Kovarianz	484
8.1.2.	Schätzung des Korrelationskoeffizienten.	485
8.1.3.	Maximum-Likelihood-Schätzung des Korrelationskoeffizienten ρ bei Normalverteilungen	485
8.2.	Test des Korrelationskoeffizienten bei Normalverteilungen	486
8.2.1.	Test von $\rho = 0$ (Test auf Unabhängigkeit).	486

8.2.2.	Test von p mit der Fisher-Transformation	487
8.2.3.	Test auf Gleichheit zweier Korrelationskoeffizienten	488
8.2.4.	Test auf Gleichheit mehrerer Korrelationskoeffizienten	491
8.3.	Konfidenzintervalle für den Korrelationskoeffizienten p bei Normalverteilungen	493
Kapitel Dt : Varianzanalyse		495
1.	Einfache Varianzanalyse	497
1.1.	Einfache Varianzanalyse bei festen Effekten.	497
1.1.1.	Quadratsummenzerlegung bei unbalancierten Daten	498
1.1.2.	Quadratsummenzerlegung bei balancierten Daten	503
1.1.3.	Schätzwerte für die Parameter des Modells.	504
1.1.4.	Konfidenzintervalle und Tests von er^2 bei Normalverteilungen	504
1.1.5.	Test auf Gleichheit der Erwartungswerte bei Normalverteilungen	505
1.1.6.	Simultane (multiple) Vergleiche von m Erwartungswerten bei Normalverteilungen	507
1.1.6.1.	Der Scheffe-Test	508
1.1.6.2.	Der Tukey-Test	509
1.1.7.	Test auf Gleichheit der Erwartungswerte ohne Normal Verteilungsannahme.	510
1.1.8.	Test auf Gleichheit von m Varianzen	510
1.1.8.1.	Der Bartlett-Test bei Normalverteilungen.	510
1.1.8.2.	Der χ^2 -Test von Scheffe bei stetigen Verteilungen	510
1.1.9.	Andere Modelldarstellung	511
1.2.	Einfache Varianzanalyse bei zufälligen Effekten.	512
1.2.1.	Quadratsummenzerlegung bei unbalancierten Daten	512
1.2.2.	Quadratsummenzerlegung bei balancierten Daten	514
1.2.3.	Schätzwerte für die Parameter des Modells.	515
1.2.3.1.	Schätzung des Erwartungswertes β	515
1.2.3.2.	Schätzung der Fehlervarianz $\langle r^2$	516
1.2.3.2.	Schätzung der Varianzkomponente $\langle r^2$	516
1.2.4.	Konfidenzintervalle für die Fehlervarianz a^2 bei Normal Verteilungen	517
1.2.5.	Konfidenzintervalle für $\langle T^2 \rangle / a^2$ und $(\langle r^2 + (T^2) / a^2$ bei Normal Verteilungen und balancierten Daten.	517
1.2.6.	Test der Fehlervarianz er^2 bei Normalverteilungen	519
1.2.7.	Test der Nullhypothese $a \setminus = 0$ bei Normalverteilungen	519

2.	Zweifache Varianzanalyse bei Kreuzklassifikation	521
2.1.	Einfache Klassenbesetzung	521
2.1.1.	Feste Effekte bei einfacher Klassenbesetzung	521
2.1.1.1.	Quadratsummenzerlegung	523
2.1.1.2.	Schätzwerte für die Parameter des Modells.	527
2.1.1.3.	Tests und Konfidenzintervalle für χ^2 bei Normalverteilungen	527
2.1.1.4.	Test auf unterschiedlichen Einfluß bei Normalverteilungen	527
2.1.1.5.	Multiple Vergleiche bei Normalverteilungen	530
2.1.1.6.	Test auf unterschiedlichen Einfluß der Stufen eines Faktors ohne Normalverteilungsannahme.	531
2.1.2.	Zufällige Effekte bei einfacher Klassenbesetzung	531
2.1.2.1.	Quadratsummenzerlegung	532
2.1.2.2.	Schätzwerte für die Parameter des Modells.	534
2.1.2.3.	Tests und Konfidenzintervalle bei Normalverteilungen	535
2.1.2.4.	Test auf unterschiedlichen Einfluß der Stufen eines Faktors bei Normalverteilungen.	536
2.1.3.	Gemischte Effekte bei einfacher Klassenbesetzung	537
2.1.3.1.	Quadratsummenzerlegung	538
2.1.3.2.	Schätzwerte für die Parameter des Modells.	540
2.1.3.3.	Tests und Konfidenzintervalle bei Normalverteilungen	540
2.1.3.4.	Test auf unterschiedlichen Einfluß der Stufen eines Faktors bei Normalverteilungen.	540
2.2.	Zweifache Varianzanalyse bei mehrfacher gleicher Klassenbesetzung - Modell ohne Wechselwirkung	541
2.2.1.	Feste Effekte ohne Wechselwirkung	542
2.2.1.1.	Quadratsummenzerlegung	543
2.2.1.2.	Schätzwerte für die Parameter des Modells.	545
2.2.1.3.	Tests und Konfidenzintervalle für e^2 bei Normalverteilungen	546
2.2.1.4.	Test auf unterschiedlichen Einfluß der Stufen eines Faktors bei Normalverteilungen.	546
2.2.2.	Zufällige Effekte ohne Wechselwirkung	547
2.2.2.1.	Quadratsummenzerlegung	547
2.2.2.2.	Schätzwerte für die Parameter des Modells.	548
2.2.2.3.	Tests und Konfidenzintervalle für die Parameter bei Normalverteilungen	549
2.2.2.4.	Test auf unterschiedlichen Einfluß der Stufen eines Faktors bei Normalverteilungen.	551
2.2.3.	Gemischte Effekte ohne Wechselwirkung	551
2.3.	Zweifache Varianzanalyse bei Wechselwirkung mit balancierten Daten.	553

2.3.1. Wechselwirkung bei festen Effekten	553
2.3.1.1. Quadratsummenzerlegung	553
2.3.1.2. Schätzwerte für die Parameter des Modells.	556
2.3.1.3. Tests und Konfidenzintervalle für er^2 bei Normalverteilungen	557
2.3.1.4. Test auf unterschiedlichen Einfluß der Faktoren und auf Wechselwirkung bei Normalverteilungen.	557
2.3.2. Wechselwirkung bei zufälligen Effekten	560
2.3.2.1. Quadratsummenzerlegung	561
2.3.2.2. Schätzwerte für die Parameter des Modells.	562
2.3.2.3. Tests und Konfidenzintervalle für $<T^2$ bei Normalverteilungen	563
2.3.2.4. Test auf unterschiedlichen Einfluß der Faktoren und auf Wechselwirkung bei Normalverteilungen.	563
2.3.3. Wechselwirkung bei gemischten Effekten	565
2.3.3.1. Das Modell ohne Raparametrisierungsbedingungen	565
2.3.3.2. Das Modell mit Raparametrisierungsbedingungen	569
2.3.3.3. Vergleich der beiden Modelle.	573
3. Zweifache Varianzanalyse mit hierarchischer Klassifikation	574
3.1. Feste Effekte	576
3.1.1. Quadratsummenzerlegung.	576
3.1.2. Schätzungen der Parameter.	580
3.1.3. Tests und Konfidenzintervalle für a^2 bei Normalverteilungen	580
3.1.4. Test auf unterschiedlichen Einfluß der Faktoren bei Normalverteilungen.	580
3.2. Zufällige Effekte	581
3.2.1. Quadratsummenzerlegung	582
3.2.2. Schätzungen der Parameter.	584
3.2.3. Tests der Varianzkomponenten bei Normalverteilungen	585
3.3. Gemischte Effekte	586
 Kapitel X : Regressionsanalyse	 589
1. Einfache Regression - Regression bei einer einzigen unabhängigen Variablen	590
1-1. Das allgemeine Regressionsmodell.	590
1:2. Einfache lineare Regression.	592
1'.2.1. Schätzung der Parameter der Regressionsgeraden	593 ^x
1'.2.2. Quadratsummenzerlegung (Varianzanalyse bezüglich y)	598
1.2.3. Schätzungen der Varianzen und der Kovarianz	601
1.2.4. Tests und Konfidenzintervalle bei Normalverteilungen	602

1.2.5.	Simultane Tests und gemeinsame Konfidenzbereiche für β_Q und β_I bei Normalverteilungen	606
1.2.6.	Konfidenzintervalle für den Erwartungswert β_0 4- β^{x_0} an einer festen Stelle x_0 bei Normalverteilungen	612
1.2.7.	Simultane Konfidenzstreifen für die gesamte Regressionsgerade bei Normalverteilungen	614
1.2.8.	Prognose-Intervalle für die Realisierung der Zufallsvariablen $Y(x_0)$ bei Normalverteilungen	615
1.2.9.	Test auf Linearität der Regression bei Normalverteilungen	616
1.2.10.	Lineare Regression mit $x = 0$	622
1.2.11.	Vergleich der Parameter zweier Regressionsgeraden bei Normalverteilungen	622
1.2.11.1.	Vergleich der beiden Varianzen	623
1.2.11.2.	Vergleich der beiden Regressionskoeffizienten β^{\wedge} und $/?^{*2}$	624
1.2.11.3.	Vergleich der beiden Achsenabschnitte	625
1.2.11.4.	Test auf Gleichheit der beiden Regressionsgeraden	625
1.2.12.	Transformation auf Linearität	626
2.	Multiple lineare Regression bei p unabhängigen Variablen.	627
2.1.	Das allgemeine Regressionsmodell	627
2.2.	Kleinste-Quadrate-Schätzungen	629
2.3.	Quadratsummenzerlegung	631
2.4.	Schätzungen der Varianzen und Kovarianzen	633
2.5.	Tests und Konfidenzintervalle bei Normalverteilungen	633
2.6.	Simultane Tests und Konfidenzbereiche bei Normalverteilungen	635
2.6.1.	Test der Nullhypothese $H_0: \beta = 0$	636
2.6.2.	Test der Nullhypothese $H_0: \beta = /?'$	637
2.6.3.	Gemeinsame Konfidenzbereiche für sämtliche $p + 1$ Regressionskoeffizienten bei Normalverteilungen	637
2.7.	Konfidenzintervalle für den Erwartungswert bei Normalverteilungen	639
2.8.	Simultanes Konfidenzband bei Normalverteilungen	640
2.9.	Prognose-Intervalle für die Realisierungen bei Normalverteilungen	641
2.10.	Kleinste-Quadrate-Schätzer unter linearen Nebenbedingungen	642
2.11.	Tests linearer Hypothesen bei Normalverteilungen	644
2.11.1.	Test der Nullhypothese $H_0: \beta = 0$	646
2.11.2.	Test der Nullhypothese $H_0: \beta = /?'$	646
2.11.3.	Test der Nullhypothese $H_0: /?_k = \beta'_k$	646
2.11.4.	Test der Nullhypothese $H_0: /?_1 = /?_2 = \dots = \beta_l = 0$	647

2.12.	Vergleich zweier Regressionsgeraden bei Normalverteilungen	648
2.12.1.	Test von $H_0 : \beta^\wedge = \beta^{(2)}$.	650
2.12.2.	Test von $H_0 : \beta^\wedge = \beta^{(2)}$.	651
2.12.3.	Test auf Gleichheit zweier Regressionsgeraden.	652
2.13.	Test auf Gleichheit mehrerer Regressionsgeraden.	653
3.	Einfache quadratische Regression	654
3.1.	Schätzung der Parameter.	655
3.1.1.	Schätzung aus den Abständen von der Parabel	655
3.1.2.	Schätzung mit Hilfe der multiplen Regression.	657
3.2.	Bestimmung der Matrix $C = (X^T X)^{-1}$.	657
3.3.	Schätzungen der Varianzen und Kovarianzen.	660
3.4.	Tests und Konfidenzintervalle bei Normalverteilungen	662
3.5.	Gemeinsame Konfidenzbereiche bei Normalverteilungen	664
3.6.	Konfidenzbereiche für den Erwartungswert.	665
3.7.	Simultanes Konfidenzband für die gesamte Regressionsparabel bei Normalverteilungen	665
3.8.	Prpgnose-Intervalle für die Realisierungen der Zufallsvariablen $Y(x_0)$ bei Normalverteilungen.	666
3.9.	Tests linearer Hypothesen bei Normalverteilungen	666
3.9.1.	Test der Nullhypothese $H_0 : \beta = \beta_0$.	667
3.9.2.	Test der Nullhypothese $H_0 : \beta_k = \beta_k^0$.	668
3.9.3.	Test der Nullhypothese $H_0 : \beta_x = \beta_x^0 = 0$.	668

Kapitel XI : Nichtparametrische (verteilungsfreie) statistische Methoden 669

1.	Iterationstest (Test auf Zufälligkeit).	669
2.	Der allgemeine Vorzeichen-Test	673
2.1.	Vorzeichen-Test bei stetigen Zufallsvariablen.	673
2.2.	Vorzeichen-Test bei beliebigen Zufallsvariablen (Bindungen)	675
2.3.	Test auf zufällige Abweichungen bei verbundenen Stichproben.	676
3.	Der Mann-Withney-U Test	677
3.1.	Stichproben ohne Bindungen	679
3.2.	Stichproben mit Bindungen	681
4.	Ranggrößen (Order statistics).	682
4.1.	Die Rangzahlen einer Stichprobe.	682
4.2.	Verteilungen der Rangstatistiken im stetigen Fall	684

4.3.	Verteilungen der Ordnungsstatistiken im stetigen Fall	686
4.3.1.	Dichten der einzelnen Ordnungsstatistiken.	686
4.3.2.	Momente der Ordnungsstatistiken einer in $[0; 1]$ gleichmäßig verteilten Zufallsvariablen.	687
4;3.3.	Asymptotische Approximation der Erwartungswerte und Varianzen der Ordnungsstatistiken.	688
4.3.4.	Konvergenz der Ordnungsstatistiken	688
4.3.4.1.	Stochastische Konvergenz der Ordnungsstatistiken	689
4.3.4.2.	Asymptotische Verteilung der Ordnungsstatistiken	689
4.3.5.	Gemeinsame Dichten von Ordnungsstatistiken.	690
4.3.6.	Die Verteilung der Spannweite.	690
5.	Vorzeichen-Rangtest (Symmetrie-Test) nach Wilcoxon	691
5.1.	Der Vorzeichen-Rangtest ohne Bindungen.	691
5.2.	Der Vorzeichen-Rangtest bei Bindungen.	696
6.	Schätzungen und Tests des Medians im stetigen Fall	697
6.1.	Schätzung des Medians.	697
6.2.	Konfidenzintervalle für den Mediän.	698
6.3.	• Der Vorzeichen-Test für den Mediän.	701
6.4.	Test des Medians bei symmetrischen Verteilungen (Vorzeichen Rangtest).	703
7.	Schätzungen und Tests von Quantilen im stetigen Fall	705
7.1.	Schätzwerte für ein Quantil.	705
7.2.	Konfidenzintervalle für ein Quantil	706
7.3.	Tests von Quantilen	709
8.	Wilcoxon- Rangsummentest	711
9.	Vergleich zweier Verteilungsfunktionen bei ungebundenen Stichproben	718
9.1.	Der Chi-Quadrat-Homogenitätstest	719
9.2.	Kolmogorow-Smirnow-Zweistichproben-Test	719
9.3.	Der Iterationstest von Wald-Wolfowitz	719
9.4.	Der Wilcoxon-Rangsummentest	721
10.	Lagealternativen (additive Lokationsmodelle).	722
10.1.	Tests und Konfidenzintervalle des Parameters θ bei Normalverteilungen oder großem Stichprobenumfang	723
10.2.	Test mit Hilfe des Rangsummentests.	723
10.3.	Test von θ mit dem van der Waerden-Test	725
10.4.	Test mit dem Kolmogorow-Smirnow-Zweistichprobentest	727
10.5.	Schätzungen des Lageparameters.	728

10.5.1. Schätzung durch den Stichprobenmittelwert	728
10.5.2. Schätzung durch den Stichprobenmedian	728
10.5.3. Schätzung mit Hilfe von Ranggrößen (Hodges-Lehmann)	729
10.6. Konfidenzintervalle für den Lageparameter.	729
11. Variabilitätsalternativen (Skalierungsprobleme).	731
11.1. Transformation auf additive Lagemodelle.	733
11.2. Test des Skalierungsparameters	733
11.2.1. Test bei Normalverteilungen	733
11.2.2. Der Siegel-Tukey-Test	734
11.2.3. Der Mood-Test	736
11.2.4. Der Ansari-Bradley-Test	737
11.2.5. Der Klotz-Test	740
11.2.6. Der Sukhatme-Test	741
11.3. Konfidenzintervalle	742
11.3.1. Konfidenzintervalle für θ bei Normalverteilungen	742
11.3.2. Verteilungsfreie Konfidenzintervalle für θ	742
12. Vergleich mehrerer Verteilungsfunktionen.	744
12.1. Tests bei nichtverbundenen Stichproben.	744
12.1.1. Der Chi-Quadrat-Homogenitätstest	745
12.1.2. Der Kruskal-Wallis-Test	745
12.2.2. Der Friedman-Test bei verbundenen Stichproben	748
Anhang	753
Literaturverzeichnis.	753
Tabellenanhang	761
Tab. 1: Verteilungsfunktion $F(z)$ der Standard-Normalverteilung	762
Tab. 2: " Quantile z_{α} der Standard- Normalverteilung	764
Tab. 3: Quantile $t_{n, j-Q}$ der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden	766
Tab. 4: Quantile $\chi^2_{n, i-Q}$ der Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden.	769
Tab. 5: Quantile $F_{n_1, n_2; 1-\alpha}$ der F-Verteilung mit (n_1, n_2) Freiheitsgraden.	772
Tab. 6: Kritische Grenzen beim Kolmogorow-Smirnow- Anpassungstest (Einstichprobentest).	783

Tab. 7:	Kritische Grenzen beim Kolmogorow-Smirnow-Zwei- stichproben-Test bei gleichen Stichprobenumfängen ($n_1 = n_2 = n$).784
Tab. 8:	Quantile $q_{n, \alpha, j}$ der Studentisierten Spannweite	785
Tab. 9:	Kritische Werte für den Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest	787
Tab. 10:	Kritische Werte $w^{(1)}$ beim Wilcoxon- Rangsummen-Test789
Register.795