Wolfgang Kohn · Riza Öztürk

Mathematik für Ökonomen

Ökonomische Anwendungen der linearen Algebra und Analysis mit Scilab

4., überarbeitete und ergänzte Auflage

Springer Gabler

Inhaltsverzeichnis

Teil I Grundlagen

1 Mengenlehre 3
1.1 Vorbemerkung 3
1.2 Mengen 4
1.2.1 Mengenoperationen 7
1.2.2 Mengengesetze 11
1.2.3 Zahlenmengen 13
1.3 Fazit 17

2 Funktionen 19
2.1 Vorbemerkung 19
2.2 Funktionsbegriff 20
2.3 Funktionen in Scilab 24
2.4 Besondere mathematische Zeichen und Funktionen 25
2.4.1 Summenzeichen 25
2.4.2 Produktzeichen 29
2.4.3 Betragsfunktion 30
2.4.4 Ganzzahlfunktion 30
2.4.5 Potenz- und Wurzelfunktion 31
2.4.6 Exponentialfunktion 34
2.4.7 Logarithmusfunktion 38
2.4.8 Binomischer Satz 41
2.4.9 Anwendung in Scilab 44
2.5 Fazit 46

3 Kombinatorik 47
3.1 Vorbemerkung 47
3.2 Binomialkoeffizient 48
3.3 Permutation 49
3.3.1 Permutation ohne Wiederholung 49
3.3.2 Permutation mit Wiederholung 50
3.4 Variation 51
3.4.1 Variation ohne Wiederholung 51
3.4.2 Variation mit Wiederholung 52

3.5 Kombination ... 53
3.5.1 Kombination ohne Wiederholung ... 53
3.5.2 Kombination mit Wiederholung ... 54
3.6 Fazit ... 58

Teil II Lineare Algebra

4 Vektoren ... 61
4.1 Vorbemerkung ... 61
4.2 Eigenschaften von Vektoren ... 62
4.3 Operationen mit Vektoren ... 64
4.3.1 Addition (Subtraktion) von Vektoren ... 64
4.3.2 Skalares Vielfaches eines Vektors ... 64
4.4 Geometrische Darstellung von Vektoren ... 65
4.5 Linearkombinationen und lineare Abhängigkeit von Vektoren ... 66
4.6 Linear unabhängige Vektoren und Basisvektoren ... 66
4.7 Skalarprodukt (inneres Produkt) ... 69
4.8 Vektoren in Scilab ... 72
4.9 Fazit ... 73

5 Matrizen ... 75
5.1 Vorbemerkung ... 75
5.2 Einfache Matrizen ... 76
5.3 Spezielle Matrizen ... 77
5.4 Operationen mit Matrizen ... 78
5.4.1 Addition (Subtraktion) von Matrizen ... 78
5.4.2 Multiplikation einer Matrix mit einem skalaren Faktor ... 79
5.4.3 Multiplikation von Matrizen ... 79
5.5 Ökonomische Anwendung ... 80
5.6 Matrizenrechnung mit Scilab ... 84
5.7 Fazit ... 85

6 Lineare Gleichungssysteme ... 87
6.1 Vorbemerkung ... 88
6.2 Inhomogene lineare Gleichungssysteme ... 88
6.2.1 Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems ... 89
6.2.2 Linear abhängige Gleichungen im Gleichungssystem ... 92
6.2.3 Lösen eines Gleichungssystems mit dem Gauß-Algorithmus ... 94
6.2.4 Lösen eines Gleichungssystems mit Scilab ... 101
6.3 Rang einer Matrix ... 101
6.3.1 Eigenschaft des Rangs ... 101
6.3.2 Rang und lineares Gleichungssystem ... 102
6.3.3 Berechnung des Rangs mit Scilab ... 103
6.4 Inverse einer Matrix ... 103
6.4.1 Eigenschaft der Inversen ... 104
6.4.2 Berechnung der Inversen ... 104

6.4.3 Berechnung von Inversen mit Scilab 106
6.5 Ökonomische Anwendung: Input-Output-Analyse 106
6.5.1 Klassische Analyse 107
6.5.2 Preisanalyse 109
6.5.3 Lösen linearer Gleichungssysteme mit Scilab 113
6.6 Determinante einer Matrix 115
6.6.1 Berechnung von Determinanten 115
6.6.2 Einige Eigenschaften von Determinanten 119
6.6.3 Berechnung von Determinanten in Scilab 120
6.7 Homogene Gleichungssysteme 120
6.7.1 Eigenwerte 120
6.7.2 Eigenvektoren 121
6.7.3 Einige Eigenschaften von Eigenwerten 122
6.7.4 Ähnliche Matrizen 123
6.7.5 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren mit Scilab 125
6.8 Fazit 125

7 Lineare Optimierung 127
7.1 Vorbemerkung 127
7.2 Formulierung der Grundaufgabe 128
7.3 Grafische Maximierung 131
7.4 Matrix-Formulierung der linearen Optimierung 132
7.5 Simplex-Methode für die Maximierung 133
7.6 Interpretation des Simplex-Endtableaus 138
7.7 Sonderfälle im Simplex-Algorithmus 141
7.7.1 Unbeschränkte Lösung 141
7.7.2 Degeneration 141
7.7.3 Mehrdeutige Lösung 142
7.8 Erweiterungen des Simplex-Algorithmus 143
7.8.1 Berücksichtigung von Größer-gleich-Beschränkungen . . 143
7.8.2 Berücksichtigung von Gleichungen 145
7.9 Ein Minimierungsproblem 147
7.10 Grafische Minimierung 148
7.11 Simplex-Methode für die Minimierung 149
7.12 Dualitätstheorem der linearen Optimierung 151
7.13 Lineare Optimierung mit Scilab 153
7.14 Ganzzahlige Lineare Optimierung 155
7.14.1 Branch and Bound Verfahren 156
7.14.2 Schnittebenenverfahren 158
7.15 Ganzzahlige Lineare Optimierung mit Scilab 162
7.16 Fazit 162

Teil III Analysis

8 Rationale Funktionen, Folgen und Reihen 165
8.1 Vorbemerkung 165

8.2 Ganz-rationale Funktionen ... 166
8.2.1 Partialdivision und Linearfaktorzerlegung ... 168
8.2.2 Nullstellenberechnung mit der Regula Falsi ... 170
8.2.3 Nullstellenberechnung mit Scilab ... 173
8.3 Gebrochen-rationale Funktionen ... 175
8.4 Folgen ... 177
8.4.1 Arithmetische Folge ... 179
8.4.2 Geometrische Folge ... 179
8.5 Reihen ... 180
8.5.1 Arithmetische Reihe ... 181
8.5.2 Geometrische Reihe ... 182
8.6 Fazit ... 184

9 Grundlagen der Finanzmathematik ... 185
9.1 Vorbemerkung ... 186
9.2 Tageszählkonventionen ... 187
9.3 Lineare Zinsrechnung ... 188
9.4 Exponentielle Zinsrechnung ... 189
9.4.1 Nachschüssige exponentielle Verzinsung ... 189
9.4.2 Vorschüssige exponentielle Verzinsung ... 191
9.4.3 Gemischte Verzinsung ... 193
9.4.4 Unterjährige periodische Verzinsung ... 193
9.5 Rentenrechnung ... 200
9.5.1 Rentenrechnung mit linearer Verzinsung ... 200
9.5.2 Rentenrechnung mit exponentieller Verzinsung ... 202
9.6 Besondere Renten ... 216
9.6.1 Wachsende Rente ... 216
9.6.2 Ewige Rente ... 216
9.7 Kurs- und Renditeberechnung eines Wertpapiers ... 218
9.7.1 Kursberechnung ... 218
9.7.2 Renditeberechnung für ein Wertpapier ... 221
9.7.3 Berechnung einer Wertpapierrendite mit Scilab ... 223
9.7.4 Zinssatzstruktur ... 224
9.7.5 Barwertberechnung bei nicht-flacher Zinssatzstruktur ... 224
9.7.6 Berechnung von Nullkuponrenditen mit Scilab ... 228
9.7.7 Duration ... 228
9.7.8 Berechnung der Duration mit Scilab ... 232
9.8 Annuitätenrechnung ... 233
9.8.1 Annuität ... 233
9.8.2 Restschuld ... 235
9.8.3 Tilgungsrate ... 236
9.8.4 Anfänglicher Tilgungssatz ... 237
9.8.5 Tilgungsplan ... 239
9.8.6 Berechnung eines Tilgungsplans mit Scilab ... 241
9.8.7 Effektiver Kreditzinssatz ... 242

9.8.8 Berechnung des effektiven Kreditzinssatzes mit Scilab .. 249
9.8.9 Mittlere Kreditlaufzeit 250
9.8.10 Margenbarwert eines Kredits 252
9.8.11 Berechnung des Margenbarwerts mit Scilab 254
9.9 Investitionsrechnung 257
9.9.1 Kapitalwertmethode 258
9.9.2 Methode des internen Zinssatzes 259
9.9.3 Berechnungen des Kapitalwerts und des internen Zinssatzes mit Scilab 261
9.9.4 Probleme der Investitionsrechnung 262
9.9.5 Investitionsrechnung bei nicht-flacher Zinssatzstruktur .. 264
9.10 Fazit 269

10 Differentialrechnung für Funktionen mit einer Variable 271
10.1 Vorbemerkung 272
10.2 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion 273
10.3 Differentialquotient 274
10.3.1 Ableitung einer Potenzfunktion 277
10.3.2 Ableitung der Exponentialfunktion 277
10.3.3 Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion 278
10.3.4 Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion 278
10.4 Differentiation von verknüpften Funktionen 279
10.4.1 Konstant-Faktor-Regel 279
10.4.2 Summenregel 280
10.4.3 Produktregel 280
10.4.4 Quotientenregel 282
10.4.5 Kettenregel 283
10.5 Ergänzende Differentiationstechniken 285
10.5.1 Ableitung der Umkehrfunktion 285
10.5.2 Ableitung einer logarithmierten Funktion 286
10.5.3 Ableitung der Exponentialfunktion zur Basis a 287
10.5.4 Ableitung der Logarithmusfunktion zur Basis a 288
10.6 Höhere Ableitungen und Extremwerte 289
10.7 Newton-Verfahren 293
10.8 Ökonomische Anwendung 295
10.8.1 Ertragsfunktion 295
10.8.2 Kostenfunktion 298
10.8.3 Beziehung zwischen Grenzerlös und Preis 301
10.8.4 Individuelle Angebotsplanung unter vollkommener Konkurrenz 303
10.8.5 Angebotsverhalten eines Monopolisten 306
10.8.6 Elastizitäten 310
10.9 Fazit 316

11 Funktionen und Differentialrechnung mit zwei Variablen 317
11.1 Vorbemerkung 317

11.2 Funktionen mit zwei Variablen ... 318
11.2.1 Isoquanten ... 319
11.2.2 Nullstellen ... 319
11.3 Differenzieren von Funktionen mit zwei Variablen ... 320
11.3.1 Partielles Differential ... 320
11.3.2 Partielles Differential höherer Ordnung ... 322
11.3.3 Totales Differential ... 322
11.3.4 Differentiation impliziter Funktionen ... 323
11.3.5 Ökonomische Anwendungen ... 324
11.4 Extremwertbestimmung ... 327
11.5 Extremwertbestimmung unter Nebenbedingung: Lagrange-Funktion ... 331
11.5.1 Notwendige Bedingung für einen Extremwert ... 332
11.5.2 Lagrange-Multiplikator ... 336
11.5.3 Hinreichende Bedingung für ein Maximum bzw. Minimum ... 337
11.5.4 Ökonomische Anwendung: Minimalkostenkombination ... 341
11.5.5 Ökonomische Anwendung: Portfolio-Theorie nach Markowitz ... 344
11.6 Fazit ... 364

12 Grundlagen der Integralrechnung ... 365
12.1 Vorbemerkung ... 365
12.2 Das unbestimmte Integral ... 366
12.2.1 Integrale für elementare Funktionen ... 367
12.2.2 Integrationsregeln ... 368
12.2.3 Ökonomische Anwendung ... 376
12.3 Das bestimmte Integral ... 378
12.3.1 Hauptsatz der Integralrechnung ... 379
12.3.2 Eigenschaften bestimmter Integrale ... 381
12.3.3 Beispiele für bestimmte Integrale ... 383
12.3.4 Ökonomische Anwendung ... 383
12.3.5 Integralberechnung mit Scilab ... 385
12.4 Uneigentliche Integrale ... 386
12.4.1 Ökonomische Anwendung ... 386
12.4.2 Statistische Anwendung ... 387
12.5 Fazit ... 388

Teil IV Anhang

13 Anhang A: Eine kurze Einführung in Scilab ... 391

14 Anhang B: Lösungen zu den Übungen ... 395

Literatur ... 429

Sachverzeichnis ... 431