

Di H.G.Hahn

Methode der finiten Elemente in der Festigkeitslehre

2. Auflage
(unveränderter Nachdruck der 1. Auflage)

Mit 142 Abbildungen



Akademische Verlagsgesellschaft
Wiesbaden 1982

EINFÜHRUNG IN DIE METHODE DER FINITEN ELEMENTE IN DER FESTIGKEITSLEHRE

1. Übersicht über die Methode der finiten Elemente	1
1.1. Aufgabe der Festigkeitslehre	1
1.2. Exakte und Näherungslösungen	1
1.3. Verschiebungs- und Gleichgewichtsmethode	3
1.4. Anwendungsbereiche der MFE	5
1.5. Geschichtliche Entwicklung der MFE	6
2. Einführung in die Grundlagen	
2.1. <i>Matrixalgebra</i>	9
2.1.1. Definition und Bezeichnung der Matrizen	9
2.1.2. Gleichheit, Addition und Subtraktion von Matrizen, Multiplikation mit einem skalaren Faktor	13
2.1.3. Matrixmultiplikation	14
2.1.4. Transponierte Matrix	16
2.1.5. Inverse Matrix	18
2.1.6. Untermatrizen und Matrixaufteilung	22
2.1.7. Quadratische Form. Positiv definite Matrix	23
2.1.8. Differentiation und Integration von Matrizen	24
2.1.9. Eigenwerte von Matrizen	27
2.2. <i>Einiges zur Matrizennumerik</i>	28
2.2.1. Numerische Auflösung von Gleichungssystemen	28
2.2.1.1. Nichtsymmetrische Matrizen	29
2.2.1.2. Symmetrische, positiv definite Bandmatrizen	29
2.2.2. Numerische Integration von Matrizen	31
2.3. <i>Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie</i>	33
2.3.1. Verschiebungen und Verzerrungen	33
2.3.2. Spannungen und Gleichgewichtsbedingungen	37
2.3.3. Beziehungen zwischen Spannungen und Verzerrungen	40
2.3.4. Ebene Elastizitätsprobleme	44

X

2.3.5.	Grundgleichungen in krummlinigen Koordinaten	
2.3.6.	Lösungsmethoden für die Grundgleichungen	
2.3.6.1.	NAVIERsche und BELTRAMIsche Gleichungen	
2.3.6.2.	Lösungsansätze für die NAVIER sehen und BELTRAMI- schen Gleichungen.	
2.3.6.3.	Lösungsmethoden der ebenen Elastizitätstheorie	
2.3.6.4.	Weitere Lösungsverfahren.	
2.4.	<i>Arbeitssätze der Elastizitätstheorie</i>	
2.4.1.	Arbeit der Kräfte, elastische Energie.	
2.4.2.	Virtuelle Verschiebungen, virtuelle Arbeit und Energie	
2.4.3.	Prinzip der virtuellen Arbeit	
2.4.3.1.	Prinzip vom stationären Wert des Gesamtpotentials	
2.4.4.	Weitere Sätze, die sich aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit ergeben.	
2.4.4.1.	Erster Satz von CASTIGLIANO.	
2.4.4.2.	Satz von BETTI	
2.4.4.3.	Satz von MAXWELL	
2.4.5.	Prinzip der virtuellen Ergänzungsarbeit	
3.	Matrixmethoden in der Elastostatik.	
3.1.	<i>Allgemeines über Kraft-und Verschiebungsmethoden.</i>	
3.1.1.	Statische Bestimmtheit und Unbestimmtheit	
3.1.2.	Unterschied zwischen Kraft- und Verschiebungsmethode. 3.1.2.1. Kraftmethode.	
3.1.2.2.	Verschiebungsmethode.	
3.2.	<i>Die Matrix-Steifigkeitsmethode.</i>	
3.2.1.	Steifigkeit und Steifigkeitsmatrix.	
3.2.2.	Allgemeine Steifigkeitsbeziehung	
3.2.3.	Eigenschaften und Handhabung einfacher Steifigkeits- matrizen.	
3.2.3.1.	Steifigkeitsmatrizen von Federn.	
3.2.3.2.	Addition von Steifigkeitsmatrizen.	
3.2.3.3.	Auflager- und Randbedingungen.	
3.2.4.	Allgemeines Lösungsverfahren der Matrix-Verschiebungs- methode	
3.2.4.1.	Ermittlung der unbekanntenen Knotenpunktverschiebungen und der Reaktionskräfte.	
3.2.4.2.	Verformung der einzelnen Elemente.	

3.3.	<i>Anwendung der Matrix-Verschiebungs- oder Steifigkeitsmethode bei Fachwerken.</i>	91
3.3.1.	Einzelsteifigkeitsmatrix für Fachwerkstab.	91
3.3.1.1.	örtliche und Gesamtkoordinaten, Transformationsmatrix	92
3.3.1.2.	Allgemeine Form der Steifigkeitsmatrix	94
3.3.2.	Steifigkeitsmatrizen für einfache Fachwerkteile	96
3.3.2.1.	Zusammensetzung einfacher Fachwerkteile	100
3.3.3.	Beispiele zur Fachwerkberechnung.	104
3.3.3.1.	Äußerlich statisch unbestimmtes Fachwerk	104
3.3.3.2.	Innerlich statisch unbestimmtes Fachwerk	107
3.3.3.3.	Hochgradig äußerlich statisch unbestimmtes Fachwerk	110
3.3.4.	Kinematische Stabilität bei Fachwerken.	111
3.4.	<i>Anwendung der Matrix-Steifigkeits- oder Verschiebungsmethode bei der Balkenbiegung.</i>	112
3.4.1.	Einzelsteifigkeitsmatrix für Balkenelement	113
3.4.1.1.	Transformation von örtlichen auf globale Koordinaten	117
3.4.1.2.	Innere Kräfte beim Balken, Spannungsmatrix	118
3.4.2.	Geradlinig zusammengesetzte Balkenteile.	119
3.4.2.1.	Gesamtsteifigkeitsmatrix für zweizusammengesetzte Balken	120
3.4.2.2.	Allgemeine Lösung von Balkenproblemen	122
3.4.3.	Einfache Beispiele zur Balkenberechnung	123
3.4.3.1.	Statisch bestimmt gelagerter Träger.	123
3.4.3.2.	Statisch unbestimmt gelagerter Träger.	127
3.4.4.	Balken mit verteilter Belastung	130
3.4.4.1.	Statisch gleichwertige Knotenpunktkräfte.	130
3.4.4.2.	Balken mit verteilten Lasten.	133
3.4.5.	Weitere Balkenprobleme.	135
3.4.6.	Zusammenhang von Steifigkeitsmatrix und Übertragungsmatrix	136
3.5.	<i>Einführung ein-, zwei- und dreidimensionaler Elemente zur Berechnung komplizierter Konstruktionen.</i>	140
3.5.1.	Verschiedene Elemente zur Beschreibung komplizierter Konstruktionen	141
3.5.2.	Lösungsverfahren für die Gesamtkonstruktion	144
3.6.	<i>Abschließende Bemerkungen zur Matrix- Verschiebungs- und Kraftmethode.</i>	149

- 4. Methode der finiten Elemente in der ebenen Elastizitätstheorie . . .**
- 4.1. *Allgemeine Beschreibung der Verschiebungsmethode*
- 4.1.1. Aufteilung des Kontinuums in finite Elemente
- 4.1.2. Darstellung der Verformung im Element
- 4.1.2.1. Forderungen für den Verschiebungsansatz
- 4.1.2.2. Formfunktionsmatrix
- 4.1.3. Verzerrungen und Spannungen im Element
- 4.1.4. Knotenpunktkräfte und Elementsteifigkeitsmatrix
- 4.1.5. Gesamtsteifigkeitsmatrix für ein Kontinuum und Gesamtlösung
- 4.1.6. Die MFE als Variationsmethode
- 4.1.6.1. Verschiebungsmethode für das gesamte Kontinuum
- 4.1.6.2. Anwendung des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials
- 4.1.6.3. Weitere Anwendungen der MFE
- 4.2. *Eigenschaften und Anwendung des einfachen Dreieckelements (Element mit linearem Verschiebungsansatz)*
- 4.2.1. Verformungen und Spannungen im Element
- 4.2.1.1. Verschiebungsansatz
- 4.2.1.2. Verzerrungen und Spannungen
- 4.2.2. Elementsteifigkeitsmatrix und zusätzliche Knotenpunktkräfte
- 4.2.3. Flächenkoordinaten für Dreiecke
- 4.2.4. Bildung der Gesamtsteifigkeitsmatrix und Spannungsberechnung
- 4.2.5. Elementunterteilung und Knotenpunktnumerierung
- 4.2.6. Einfaches Anwendungsbeispiel bei einem Kerbproblem
- 4.2.6.1. Elemententeilung
- 4.2.6.2. Randverschiebungen und Randlasten
- 4.2.6.3. Ergebnisse
- 4.2.6.4. Flußdiagramm des Rechenprogramms
- 4.3. *Eigenschaften des einfachen Viereckelements*
- 4.3.1. Rechteckelement
- 4.3.1.1. Verschiebungsansatz
- 4.3.1.2. Verzerrungen und Spannungen
- 4.3.1.3. Elementsteifigkeitsmatrix
- 4.3.2. Allgemeines Viereckelement
- 4.3.2.1. Verschiebungsansatz
- 4.3.2.2. Verzerrungen und Spannungen
- 4.3.2.3. Steifigkeitsmatrix

4.4.	<i>Erweiterung des einfachen Dreieckelements.</i>	222
4.4.1.	Dreieckelement mit quadratischem Verschiebungsansatz .	223
4.4.1.1.	Verschiebungsansatz.	224
4.4.1.2.	Verzerrungen, Spannungen und Steifigkeitsmatrix	226
4.4.1.3.	Beschreibung des Elements in örtlichen Koordinaten	227
4.4.2.	Dreieckelement mit kubischem Verschiebungsansatz	230
4.4.2.1.	Einführung weiterer Knotenpunkte.	230
4.4.2.2.	Einführung erweiterter Knotenpunktparameter	234
4.4.3.	Zusammengesetztes Dreieckelement	237
4.5.	<i>Erweiterung des einfachen Viereckelements.</i>	246
4.5.1.	Erhöhung der Knotenpunktzahl. LAGRANGESche Interpolationsformel.	246
4.5.2.	Einführung erweiterter Knotenpunktparameter. HERMITESche Interpolationsformel.	253
4.5.3.	Krummlinig berandete Elemente. Isoparametrische Abbildung.	257
5.	Methode der finiten Elemente in der räumlichen Elastizitätstheorie .	262
5.1.	<i>Eigenschaften des einfachen Tetraederelements.</i>	263
5.1.1.	Verschiebungsansatz.	263
5.1.2.	Verzerrungen, Spannungen und Steifigkeitsmatrix	265
5.1.3.	Beschreibung der Elementeigenschaften in Volumenkoordinaten.	269
5.2.	<i>Einfache prismatische Elemente.</i>	271
5.3.	<i>Erweiterung der einfachen räumlichen Elemente.</i>	274
5.4.	<i>Ringelemente für rotationssymmetrische Spannungsprobleme . . .</i>	<i>278</i>
5.4.1.	Element mit linearem Verschiebungsansatz	279
5.4.1.1.	Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen	280
5.4.1.2.	Elementsteifigkeitsmatrix.	282
5.4.1.3.	Zusätzliche Knotenkräfte infolge verteilter Lasten	284
5.4.2.	Element mit kubischem Verschiebungsansatz	285
5.4.3.	Anwendung rotationssymmetrischer Ringelemente	290
5.4.3.1.	Bemerkungen zur numerischen Behandlung	291
5.4.3.2.	Beispiele	293

6. Methode der finiten Elemente bei Platten	298
6.1. <i>Grundlagen der Theorie dünner Platten.</i>	298
6.1.1. Verzerrungen und Spannungen.	299
6.1.2. Gleichgewichtsbedingungen, Plattengleichung	302
6.1.3. Randbedingungen.	303
6.1.4. Elastische Energie der Platte.	304
6.2. <i>Verschiebungsmethode bei Platten. Verträglichkeit der Elemente</i>	305
6.2.1. Verschiebungs- bzw. Durchbiegungsansatz.	306
6.2.2. Verträgliche und nichtverträgliche Elemente.	306
6.2.3. Allgemeine Beschreibung der Verschiebungsmethode	307
6.3. <i>Rechteckelemente.</i>	311
6.3.1. Nichtverträgliches Element	312
6.3.2. Verträgliche Elemente.	316
6.4. <i>Dreieckplattenelemente.</i>	321
6.4.1. Nichtverträgliche Elemente.	322
6.4.1.1. Element mit quadratischem Durchbiegungsansatz	322
6.4.1.2. Element mit kubischem Durchbiegungsansatz	324
6.4.1.3. Element mit vier Knotenpunkten und kubischem Durchbiegungsansatz	327
6.4.1.4. Element mit Verschiebungsansatz vierten Grads	329
6.4.2. Verträgliche Elemente.	331
6.4.2.1. Dreieckelement mit 12 bzw. 9 Freiheitsgraden	331
6.4.2.2. Dreieckelement mit 18 Freiheitsgraden.	334
6.4.2.3. Aus Dreieckelementen zusammengesetztes Viereckelement	344
6.5. <i>Ergänzungen zur Plattenbiegung.</i>	344
6.5.1. Finite Streifenmethode.	345
6.5.2. Berücksichtigung der Schubverformung bei Platten	351
6.5.3. Stabilität von Platten (Beulen).	352
7. Methode der finiten Elemente bei Schalen	357
7.1. <i>Kurzer Einblick in die Schalentheorie</i>	357
7.1.1. Allgemeine Schalengleichungen.	358
7.1.1.1. Krummlinige Flächenkoordinaten.	358
7.1.1.2. Schnittgrößen und Gleichgewichtsbedingungen	359
7.1.1.3. Verschiebungen und Verzerrungen.	363

7.1.1.4.	Schnittgrößen-Verschiebungsbeziehungen	364
7.1.1.5.	Elastische Energie der Schale	367
7.1.2.	Flach gekrümmte Schalen	368
7.1.3.	Rotationsschalen	371
7.1.3.1.	Zylinderschalen	374
7.1.4.	Membranschalentheorie	377
7.2.	<i>Die Verschiebungsmethode bei Schalenproblemen</i>	379
7.3.	<i>Eigenschaften ebener Schalenelemente</i>	381
7.3.1.	Dreieckige Schalenelemente	381
7.3.1.1.	Globale und örtliche Koordinaten	381
7.3.1.2.	Membran-und Plattenelemente	386
7.3.1.3.	Elementsteifigkeitsmatrix	388
7.3.1.4.	Gesamtsteifigkeitsbeziehung	391
7.3.2.	Viereckige Schalenelemente	393
7.3.2.1.	Rechteckelement	393
7.3.2.2.	Zusammengesetztes Viereckelement	395
7.4.	<i>Ringelemente für Rotationsschalen</i>	396
7.4.1.	Konische Ringschalenelemente	397
7.4.1.1.	Axialsymmetrische Belastung	397
7.4.1.2.	Allgemeine Belastung	403
7.4.2.	Doppeltgekrümmte Ringschalenelemente	407
7.4.2.1.	Geometrie des Ringschalenelements	408
7.4.2.2.	Verschiebungsansatz	409
7.4.2.3.	Verzerrungen und Steifigkeitsmatrix	413
7.5.	<i>Gekrümmte Schalenelemente</i>	415
7.5.1.	Kreiszylinderschalenelement	417
7.5.1.1.	Element mit 24 Freiheitsgraden	417
7.5.1.2.	Element mit 20 Freiheitsgraden	422
7.5.2.	Allgemeine doppeltgekrümmte Schalenelemente	425
7.5.2.1.	Rechteckschalenelement	425
7.5.2.2.	Dreieckschalenelemente	428
7.5.3.	Dreidimensionale Schalenelemente	436
7.5.3.1.	Dreidimensionale isoparametrische Elemente	436
7.5.3.2.	Allgemeine Schalenelemente	439
7.5.3.3.	Rotationsschalenelemente	445
Anhang:	Literaturverzeichnis	449