

Dieter Hoffmann

# Analysis für Wirtschaftswissenschaftler und Ingenieure

Mit 108 Abbildungen



Springer

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>V</b>
<b>Einleitung</b>	<b>IX</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1 Mengen und ihre Verknüpfungen . . . . .	2
1.2 Aussagen und Quantoren . . . . .	9
1.3 Abbildungen und ihre Eigenschaften . . . . .	13
1.4 Die reellen Zahlen . . . . .	18
1.4.1 Axiome und erste Folgerungen . . . . .	19
1.4.2 „Bruchrechnen“ . . . . .	24
1.4.3 Das Rechnen mit Ungleichungen und absoluten Beträgen . . . . .	25
1.5 Die natürlichen und die ganzen Zahlen . . . . .	30
1.5.1 Vollständige Induktion, rekursive Definition . . . . .	30
1.5.2 Binomial-Koeffizienten, Binomischer Satz . . . . .	37
1.6 Die rationalen Zahlen . . . . .	39
1.7 Zum Vollständigkeitsaxiom . . . . .	39
1.8 Darstellungen reeller Zahlen . . . . .	42
1.9 Komplexe Zahlen . . . . .	47
1.9.1 Einführung der komplexen Zahlen . . . . .	47
1.9.2 Konjugiert komplexe Zahlen, Beträge, Real- und Imaginärteil . . . . .	50
1.10 ‚Stetigkeit‘ der Grundoperationen (in $R$ und $C$ ) . . . . .	52
<b>2 Funktionen einer reellen Variablen</b>	<b>57</b>
2.1 Der Funktionsbegriff . . . . .	57
2.1.1 Definition und erste Beispiele . . . . .	57
2.1.2 Graphische Darstellung von Funktionen . . . . .	59
2.1.3 Grundeigenschaften von Funktionen . . . . .	60
2.1.4 Verknüpfung von Funktionen . . . . .	63
2.2 Ganzrationale Funktionen (Polynome) . . . . .	65
2.2.1 Das HORNER-Schema . . . . .	66
2.2.2 Stellenwertsysteme . . . . .	69
2.2.3 Das Rechnen mit Polynomen . . . . .	71

2.2.4	Nullstellen von Polynomen . . . . .	73
2.3	(Gebrochen) Rationale Funktionen . . . . .	76
<b>3</b>	<b>Folgen, Reihen — Grenzwertbegriff, Stetigkeit</b>	<b>79</b>
3.1	Folgen . . . . .	80
3.1.1	Definitionen . . . . .	80
3.1.2	Konvergenz von Folgen . . . . .	82
3.1.3	Das Rechnen mit Grenzwerten (Grundregeln) . . . . .	86
3.1.4	Bestimmte Divergenz . . . . .	92
3.1.5	CAUCHY-Kriterium . . . . .	94
3.2	Reihen . . . . .	96
3.2.1	Definitionen und erste Beispiele . . . . .	96
3.2.2	Das Rechnen mit Reihen . . . . .	98
3.2.3	Absolut konvergente Reihen . . . . .	98
3.2.4	Konvergenzkriterien (für absolute Konvergenz) . . . . .	99
3.2.5	Alternierende Reihen, LEIBNIZ-Kriterium . . . . .	101
3.3	Potenzreihen . . . . .	102
3.3.1	Definition, Konvergenzradius . . . . .	102
3.3.2	Die Funktionen $\exp$ , $\sin$ , $\cos$ , $\operatorname{Sin}$ , $\operatorname{Cos}$ — Teil I . . . . .	104
3.4	Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit . . . . .	107
3.4.1	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	107
3.4.2	Stetigkeit, Zwischenwertsatz . . . . .	113
3.4.3	Unstetigkeiten . . . . .	116
<b>4</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>119</b>
4.1	Die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten . . . . .	120
4.2	Differentiationsregeln (Ableitungskalkül) . . . . .	125
4.3	Beispiele . . . . .	127
4.4	Satz von ROLLE und verallgemeinerter Mittelwertsatz; lokales Verhalten . . . . .	127
4.5	Differentiation von Potenzreihen . . . . .	131
4.6	Die Funktionen $\exp$ , $\sin$ , $\cos$ , $\operatorname{Sin}$ , $\operatorname{Cos}$ — Teil II . . . . .	132
4.7	Die Funktionen $\tan$ , $\cot$ , $\operatorname{Tan}$ , $\operatorname{Cot}$ . . . . .	141
4.8	Differentiation der Umkehrfunktion . . . . .	143
4.9	Höhere Ableitungen . . . . .	149
4.10	Konvexität, Konkavität . . . . .	151
4.11	Anwendungen . . . . .	153
4.11.1	Kurvenuntersuchungen . . . . .	153
4.11.2	Extremwertaufgaben . . . . .	164
4.12	Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen . . . . .	166
<b>5</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>171</b>
5.1	Stammfunktionen (unbestimmte Integrale) . . . . .	172
5.1.1	Grundlagen . . . . .	172
5.1.2	Integraltafel (Tabelle von Stammfunktionen) . . . . .	175
5.1.3	Integration rationaler Funktionen . . . . .	176

5.1.4	Integration gewisser algebraischer Funktionen . . . . .	180
5.1.5	Integration gewisser transzendenter Funktionen . . . . .	182
5.2	Bestimmtes Integral, Flächeninhalt . . . . .	183
5.2.1	Vorüberlegungen zum Flächeninhalt . . . . .	183
5.2.2	Definition des bestimmten Integrals („RIEMANN-Integral“). . . . .	184
5.2.3	Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	186
5.2.4	Anwendungsbeispiele (Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen, LEIBNIZsche Sektorformel, Volumenberechnung von Rotationskörpern) . . . . .	189
5.3	Uneigentliche Integrale . . . . .	195
5.3.1	Definition des uneigentlichen Integrals . . . . .	196
5.3.2	Absolute Integrierbarkeit; Majorantenkriterium . . . . .	198
5.3.3	Zusammenhang mit der Konvergenz von Reihen . . . . .	200
5.3.4	Die T-Funktion . . . . .	201
5.4	Elementare Methoden zur numerischen Berechnung von Integralen . . . . .	202
5.4.1	Trapez- und SIMPSON-Regel . . . . .	203
5.4.2	Zusammengesetzte Formeln . . . . .	205
	<b>Approximation von Funktionen</b> . . . . .	<b>209</b>
6.1	Polynom-Interpolation . . . . .	211
6.2	TAYLOR-Reihen . . . . .	216
6.3	Unbestimmte Ausdrücke, Regeln von DE LHÖPITAL . . . . .	221
6.4	FOURIER-Reihen . . . . .	224
	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGLn)</b> . . . . .	<b>233</b>
7.1	Richtungsfelder (für explizite DGLn 1. Ordnung). . . . .	235
7.2	DGLn mit „getrennten Variablen“. . . . .	238
7.3	Die lineare DGL 1. Ordnung . . . . .	241
7.4	BERNOULLISCHE DGL . . . . .	243
7.5	EULER-homogene DGLn . . . . .	244
7.6	Explizite DGLn 2. Ordnung ‚ohne y‘. . . . .	245
7.7	Explizite DGLn 2. Ordnung ‚ohne x‘. . . . .	246
7.8	Lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	246
7.8.1	Allgemeine Lösung der homogenen DGL . . . . .	252
7.8.2	Reelle Lösungen zu komplexen Nullstellen . . . . .	253
7.8.3	Spezialfall $n = 2$ . . . . .	254
7.8.4	Lösung der inhomogenen DGL . . . . .	255
	<b>Differenzenrechnung und Differenzgleichungen</b> . . . . .	<b>263</b>
8.1	Differenzenoperator . . . . .	265
8.2	Höhere Differenzen . . . . .	266
8.3	Faktorielle . . . . .	267
8.4	(Gewöhnliche) Differenzgleichungen . . . . .	268

8.5	Lineare Differenzgleichungen . . . . .	270
8.6	Lineare Differenzgleichungen 1. Ordnung . . . . .	273
8.7	Lineare DZGn mit konstanten Koeffizienten, Operatormethoden . . . . .	277
8.8	Inhomogene Differenzgleichungen . . . . .	285
<b>9</b>	<b>Funktionen mehrerer Variabler</b>	<b>293</b>
9.1	Der $M^n$ als normierter Vektorraum . . . . .	294
9.2	'Geometrie' $iR$ -wertiger Funktionen (Graphen, Niveaumengen, Vertikalschnitte) . . . . .	296
9.3	Folgenkonvergenz, Grenzwert (von Funktionen) und Stetigkeit	300
9.4	(,Totale') Differenzierbarkeit, partielle Differenzierbarkeit . .	304
9.5	Partielle Ableitungen höherer Ordnung, Satz von SCHWARZ .	310
9.6	Satz von TAYLOR, Fehlerfortpflanzung, HESSEsche Matrix . .	312
9.7	Extremwerte (Notwendige und hinreichende Bedingungen) . .	314
9.8	Satz über implizite Funktionen, Extrema unter Nebenbedingungen (LAGRANGE-Multiplikatoren) . . . . .	320
<b>10</b>	<b>Übungen</b>	<b>327</b>
10.1	Übungen zu Kapitel 1 . . . . .	327
10.2	Übungen zu Kapitel 2 . . . . .	331
10.3	Übungen zu Kapitel 3 . . . . . TT>>, . . .	333
10.4	Übungen zu Kapitel 4 . . . . .	337
10.5	Übungen zu Kapitel 5 . . . . .	345
10.6	Übungen zu Kapitel 6 . . . . .	351
10.7	Übungen zu Kapitel 7 . . . . .	356
10.8	Übungen zu Kapitel 8 . . . . .	360
10.9	Übungen zu Kapitel 9 . . . . .	366
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>371</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>375</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>377</b>