

Jürgen Tietze

# **Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik**

11., verbesserte Auflage

Mit 500 Abbildungen und 1300 Übungsaufgaben



## Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort . . . . .</b>	<b>V</b>
<b>Symbolverzeichnis. . . . .</b>	<b>XV</b>
<b>Abkürzungen, Variablennamen, griechisches Alphabet . . . . .</b>	<b>XVI</b>
<b>1 Grundlagen und Hilfsmittel . . . . .</b>	<b>1-1</b>
1.1 Mengen und Aussagen. . . . .	1-1
1.1.1 Mengenbegriff. . . . .	1-1
1.1.2 Spezielle Zahlenmengen. . . . .	1-3
1.1.3 Aussagen und Aussageformen. . . . .	1-5
1.1.4 Verknüpfungen von Aussagen und Aussageformen. . . . .	1-9
1.1.4.1 Konjunktion. . . . .	1-9
1.1.4.2 Disjunktion. . . . .	1-10
1.1.4.3 Negation. . . . .	1-11
1.1.4.4 Zusammengesetzte Aussagen. . . . .	1-11
1.1.5 Folgerung (Implikation) und Äquivalenz. . . . .	1-14
1.1.5.1 Folgerung (Implikation). . . . .	1-14
1.1.5.2 Äquivalenz. . . . .	1-16
1.1.6 Relationen zwischen Mengen. . . . .	1-17
1.1.6.1 Gleichheit zweier Mengen. . . . .	1-17
1.1.6.2 Teilmengen. . . . .	1-17
1.1.7 Verknüpfungen (Operationen) mit Mengen. . . . .	1-18
1.1.7.1 Durchschnittsmenge. . . . .	1-18
1.1.7.2 Vereinigungsmenge. . . . .	1-18
1.1.7.3 Restmenge (Differenzmenge). . . . .	1-19
1.1.8 Paarmengen, Produktmengen. . . . .	1-21
1.2 Arithmetik im Bereich der reellen Zahlen. . . . .	1-23
1.2.1 Grundregeln (Axiome) und elementare Rechenregeln in $\mathbb{R}$ . . . . .	1-23
1.2.1.1 Axiome. . . . .	1-23
1.2.1.2 Elementare Rechenregeln für reelle Zahlen . . . . .	1-26
1.2.1.3 Betrag einer Zahl. . . . .	1-31
1.2.1.4 Das Summenzeichen. . . . .	1-32
1.2.1.5 Das Produktzeichen. . . . .	1-35
1.2.1.6 Fakultät und Binomialkoeffizient. . . . .	1-35
1.2.2 Potenzen. . . . .	1-37
1.2.2.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten. . . . .	1-37
1.2.2.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten . . . . .	1-40
1.2.2.3 Potenzen mit rationalen (gebrochenen) Exponenten; Wurzeln. . . . .	1-41

1.2.2.4	Potenzen mit reellen Exponenten . . . . .	1-44
1.2.3	Logarithmen . . . . .	1-46
1.2.3.1	Begriff des Logarithmus . . . . .	1-46
1.2.3.2	Logarithmenbasen . . . . .	1-47
1.2.3.3	Rechenregeln für Logarithmen . . . . .	1-48
1.2.3.4	Logarithmen zu beliebiger Basis . . . . .	1-50
1.2.4	Gleichungen . . . . .	1-51
1.2.4.1	Allgemeines über Gleichungen und deren Lösungen . . . . .	1-51
1.2.4.2	Äquivalenzumformungen . . . . .	1-54
1.2.4.3	Lineare Gleichungen $ax + b = ex + d$ . . . . .	1-58
1.2.4.4	Lineare Gleichungssysteme (LGS) . . . . .	1-59
1.2.4.5	Quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ . . . . .	1-63
1.2.4.6	Gleichungen höheren als zweiten Grades . . . . .	1-67
1.2.4.7	Wurzelgleichungen . . . . .	1-70
1.2.4.8	Exponentialgleichungen . . . . .	1-71
1.2.4.9	Logarithmengleichungen . . . . .	1-72
1.2.4.10	Bruchgleichungen . . . . .	1-73
1.2.5	Ungleichungen . . . . .	1-74
1.2.6	Wo steckt der Fehler? . . . . .	1-78
1.2.6.1	Fehler bei Termumformungen . . . . .	1-78
1.2.6.2	Fehler bei der Lösung von Gleichungen . . . . .	1-80
1.2.6.3	Fehler bei der Lösung von Ungleichungen . . . . .	1-82
<b>2</b>	<b>Funktionen einer unabhängigen Variablen . . . . .</b>	<b>2-1</b>
2.1	Begriff und Darstellung von Funktionen . . . . .	2-1
2.1.1	Funktionsbegriff . . . . .	2-1
2.1.2	Graphische Darstellung von Funktionen . . . . .	2-6
2.1.3	Abschnittsweise definierte Funktionen . . . . .	2-11
2.1.4	Umkehrfunktionen . . . . .	2-14
2.1.5	Implizite Funktionen . . . . .	2-19
2.1.6	Verkettete Funktionen . . . . .	2-20
2.2	Eigenschaften von Funktionen . . . . .	2-22
2.2.1	Beschränkte Funktionen . . . . .	2-22
2.2.2	Monotone Funktionen . . . . .	2-23
2.2.3	Symmetrische Funktionen . . . . .	2-24
2.2.4	Nullstellen von Funktionen . . . . .	2-25
2.3	Elementare Typen von Funktionen . . . . .	2-26
2.3.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome) . . . . .	2-26
2.3.1.1	Grundbegriffe, Horner-Schema . . . . .	2-26
2.3.1.2	Konstante und lineare Funktionen . . . . .	2-28
2.3.1.3	Quadratische Funktionen . . . . .	2-35
2.3.1.4	Nullstellen von Polynomen und Polynomzerlegung . . . . .	2-38
2.3.2	Gebrochen-rationale Funktionen . . . . .	2-41
2.3.3	Algebraische Funktionen (Wurzelfunktionen) . . . . .	2-43

2.3.4	Exponentialfunktionen . . . . .	2-46
2.3.5	Logarithmusfunktionen . . . . .	2-48
2.3.6	Trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen, Winkelfunktionen) . . . . .	2-49
2.4	Iterative Gleichungslösung und Nullstellenbestimmung (Regula falsi) . . . . .	2-55
2.5	Beispiele ökonomischer Funktionen . . . . .	2-59
<b>3</b>	<b>Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen . . . . .</b>	<b>3-1</b>
3.1	Begriff von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen . . . . .	3-1
3.2	Darstellung einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen . . . . .	3-2
3.3	Homogenität von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen . . . . .	3-13
<b>4</b>	<b>Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen . . . . .</b>	<b>4-1</b>
4.1	Der Grenzwertbegriff . . . . .	4-1
4.1.1	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow x_0$ . . . . .	4-2
4.1.2	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow \infty$ (bzw. $x \rightarrow -\infty$ ) . . . . .	4-6
4.2	Grenzwerte spezieller Funktionen . . . . .	4-13
4.3	Die Grenzwertsätze und ihre Anwendungen . . . . .	4-15
4.4	Der Stetigkeitsbegriff . . . . .	4-20
4.5	Unstetigkeitstypen . . . . .	4-22
4.6	Stetigkeitsanalyse . . . . .	4-24
4.7	Stetigkeit ökonomischer Funktionen . . . . .	4-27
4.8	Asymptoten . . . . .	4-30
<b>5</b>	<b>Differentialrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen - Grundlagen und Technik . . . . .</b>	<b>5-1</b>
5.1	Grundlagen der Differentialrechnung . . . . .	5-1
5.1.1	Problemstellung . . . . .	5-1
5.1.2	Durchschnittliche Funktionssteigung (Sekantensteigung) und Differenzenquotient . . . . .	5-2
5.1.3	Steigung und Ableitung einer Funktion (Differentialquotient) . . . . .	5-3
5.1.4	Differenzierbarkeit und Stetigkeit . . . . .	5-7
5.2	Technik des Differenzierens . . . . .	5-9
5.2.1	Die Ableitung der Grundfunktionen . . . . .	5-9
5.2.1.1	Ableitung der konstanten Funktion $f(x) = C$ . . . . .	5-9
5.2.1.2	Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ . . . . .	5-10
5.2.1.3	Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ . . . . .	5-12
5.2.1.4	Ableitung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ . . . . .	5-12
5.2.2	Ableitungsregeln . . . . .	5-14
5.2.2.1	Faktorregel . . . . .	5-14
5.2.2.2	Summenregel . . . . .	5-15
5.2.2.3	Produktregel . . . . .	5-16

5.2.2.4	Quotientenregel . . . . .	5-17
5.2.2.5	Kettenregel . . . . .	5-19
5.2.3	Ergänzungen zur Ableitungstechnik . . . . .	5-23
5.2.3.1	Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .	5-23
5.2.3.2	Ableitung allgemeiner Exponential- und Logarithmusfunktionen . . . . .	5-24
5.2.3.3	Logarithmische Ableitung . . . . .	5-27
5.2.4	Höhere Ableitungen . . . . .	5-28
5.2.5	Zusammenfassung der wichtigsten Differenzierungsregeln . . . . .	5-30
5.3	Grenzwerte bei unbestimmten Ausdrücken - Regeln von de L'Hôpital . . . . .	5-31
5.4	Newton-Verfahren zur näherungsweisen Ermittlung von Nullstellen einer Funktion . . . . .	5-39

## Anwendungen der Differentialrechnung bei Funktionen

### mit einer unabhängigen Variablen . . . . .

6-1

6.1	Zur ökonomischen Interpretation der ersten Ableitung . . . . .	6-1
6.1.1	Das Differential einer Funktion . . . . .	6-1
6.1.2	Die Interpretation der 1. Ableitung als (ökonomische) Grenzfunktion . . . . .	6-4
6.1.2.1	Grenzkosten . . . . .	6-6
6.1.2.2	Grenzerlös (Grenzumsatz, Grenzausgaben) . . . . .	6-7
6.1.2.3	Grenzproduktivität (Grenzertrag) . . . . .	6-9
6.1.2.4	Grenzgewinn . . . . .	6-10
6.1.2.5	Marginale Konsumquote . . . . .	6-12
6.1.2.6	Marginale Sparquote . . . . .	6-12
6.1.2.7	Grenzrate der Substitution . . . . .	6-13
6.1.2.8	Grenzfunktion und Durchschnittsfunktion . . . . .	6-14
6.2	Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung von Funktionen . . . . .	6-18
6.2.1	Monotonie- und Krümmungsverhalten . . . . .	6-18
6.2.2	Extremwerte . . . . .	6-22
6.2.3	Wendepunkte . . . . .	6-26
6.2.4	Kurvendiskussion . . . . .	6-28
6.2.5	Extremwerte bei nichtdifferenzierbaren Funktionen . . . . .	6-33
6.3	Die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Probleme . . . . .	6-36
6.3.1	Beschreibung ökonomischer Prozesse mit Hilfe von Ableitungen . . . . .	6-36
6.3.1.1	Beschreibung des Wachstumsverhaltens ökonomischer Funktionen . . . . .	6-37
6.3.1.2	Konstruktion ökonomischer Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften . . . . .	6-40
6.3.2	Analyse und Optimierung ökonomischer Funktionen . . . . .	6-42
6.3.2.1	Fahrstrahlanalyse . . . . .	6-43
6.3.2.2	Diskussion ökonomischer Funktionen . . . . .	6-46

6.3.2.3	Gewinnmaximierung . . . . .	6-48
6.3.2.4	Gewinnmaximierung bei doppelt-geknickter Preis-Absatz-Funktion . . . . .	6-55
6.3.2.5	Optimale Lagerhaltung . . . . .	6-57
6.3.3	Die Elastizität ökonomischer Funktionen . . . . .	6-67
6.3.3.1	Änderungen von Funktionen . . . . .	6-67
6.3.3.2	Begriff, Bedeutung und Berechnung der Elastizität von Funktionen . . . . .	6-69
6.3.3.3	Elastizität ökonomischer Funktionen . . . . .	6-75
6.3.3.4	Graphische Ermittlung der Elastizität . . . . .	6-82
6.3.4	Überprüfung ökonomischer Gesetzmäßigkeiten mit Hilfe der Differentialrechnung . . . . .	6-86
<b>7</b>	<b>Differentialrechnung bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen</b> . . . . .	<b>7-1</b>
7.1	Grundlagen . . . . .	7-1
7.1.1	Begriff und Berechnung von partiellen Ableitungen . . . . .	7-1
7.1.2	Ökonomische Interpretation partieller Ableitungen . . . . .	7-7
7.1.3	Partielle Ableitung höherer Ordnung . . . . .	7-9
7.1.4	Kennzeichnung von Monotonie und Krümmung durch partielle Ableitungen . . . . .	7-10
7.1.5	Partielles und vollständiges (totales) Differential . . . . .	7-12
7.1.6	Kettenregel, totale Ableitung . . . . .	7-15
7.1.7	Ableitung impliziter Funktionen . . . . .	7-19
7.2	Extrema bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen . . . . .	7-23
7.2.1	Relative Extrema ohne Nebenbedingungen . . . . .	7-23
7.2.2	Extremwerte unter Nebenbedingungen . . . . .	7-25
7.2.2.1	Problemstellung . . . . .	7-25
7.2.2.2	Variablensubstitution . . . . .	7-27
7.2.2.3	Lagrange-Methode . . . . .	7-28
7.3	Beispiele für die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen . . . . .	7-31
7.3.1	Partielle Elastizitäten . . . . .	7-32
7.3.1.1	Begriff der partiellen Elastizität . . . . .	7-32
7.3.1.2	Die Eulersche Homogenitätsrelation . . . . .	7-33
7.3.1.3	Elastizität homogener Funktionen . . . . .	7-34
7.3.1.4	Faktorentlohnung und Verteilung des Produktes . . . . .	7-37
7.3.2	Ökonomische Beispiele für relative Extrema (ohne Nebenbedingungen) . . . . .	7-43
7.3.2.1	Optimaler Faktoreinsatz in der Produktion . . . . .	7-43
7.3.2.2	Gewinnmaximierung von Mehrproduktunternehmungen . . . . .	7-47
7.3.2.3	Gewinnmaximierung bei räumlicher Preisdifferenzierung . . . . .	7-52

7.3.3	7.3.2.4 Die Methode der kleinsten Quadrate. . . . .	7-56
	Ökonomische Beispiele für Extrema	
	unter Nebenbedingungen . . . . .	7-59
7.3.3.1	Minimalkostenkombination . . . . .	7-59
7.3.3.2	Expansionspfad, Faktornachfrage- und Gesamtkostenfunktion. . . . .	7-66
7.3.3.3	Nutzenmaximierung und Haushaltsoptimum . . .	7-70
7.3.3.4	Nutzenmaximale Güternachfrage- und Konsumfunktionen . . . . .	7-77
<b>8</b>	<b>Einführung in die Integralrechnung . . . . .</b>	<b>8-1</b>
8.1	Das unbestimmte Integral. . . . .	8-1
8.1.1	Stammfunktion und unbestimmtes Integral. . . . .	8-1
8.1.2	Grundintegrale. . . . .	8-4
8.1.3	Elementare Rechenregeln für das unbestimmte Integral	8-5
8.2	Das bestimmte Integral. . . . .	8-7
8.2.1	Das Flächeninhaltsproblem und der Begriff des bestimmten Integrals. . . . .	8-7
8.2.2	Beispiel zur elementaren Berechnung eines bestimmten Integrals. . . . .	8-10
8.2.3	Elementare Eigenschaften des bestimmten Integrals . .	8-11
8.3	Beziehungen zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral	8-12
8.3.1	Integralfunktion. . . . .	8-12
8.3.2	Der 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	8-13
8.3.3	Der 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	8-15
8.3.4	Flächeninhaltsberechnung. . . . .	8-17
8.4	Spezielle Integrationstechniken . . . . .	8-19
8.4.1	Partielle Integration. . . . .	8-19
8.4.2	Integration durch Substitution. . . . .	8-21
8.5	Ökonomische Anwendungen der Integralrechnung . .	8-23
8.5.1	Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktionen. . . . .	8-23
8.5.2	Die Konsumentenrente. . . . .	8-26
8.5.3	Die Produzentenrente. . . . .	8-28
8.5.4	Kontinuierliche Zahlungsströme. . . . .	8-29
8.5.5	Kapitalstock und Investitionen einer Volkswirtschaft .	8-33
8.5.6	Optimale Nutzungsdauer von Investitionen . . . . .	8-34
8.6	Elementare Differentialgleichungen . . . . .	8-38
8.6.1	Einleitung . . . . .	8-38
8.6.2	Lösung von Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen. . . . .	8-39
8.6.3	Ökonomische Anwendungen separabler Differentialgleichungen . . . . .	8-42
8.6.3.1	Exponentielles Wachstum. . . . .	8-42
8.6.3.2	Funktionen mit vorgegebener Elastizität . . . . .	8-42
8.6.3.3	Neoklassisches Wachstumsmodell nach Solow . .	8-44

<b>9 Einführung in die Lineare Algebra . . . . .</b>	<b>9-1</b>
9.1 Matrizen und Vektoren . . . . .	9-1
9.1.1 Grundbegriffe der Matrizenrechnung . . . . .	9-1
9.1.2 Spezielle Matrizen und Vektoren . . . . .	9-6
9.1.3 Operationen mit Matrizen . . . . .	9-7
9.1.3.1 Addition von Matrizen . . . . .	9-7
9.1.3.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalarfaktor . . . . .	9-9
9.1.3.3 Die skalare Multiplikation zweier Vektoren (Skalarprodukt) . . . . .	9-11
9.1.3.4 Multiplikation von Matrizen . . . . .	9-12
9.1.4 Die inverse Matrix . . . . .	9-19
9.1.5 Ökonomisches Anwendungsbeispiel (Input-Output-Analyse) . . . . .	9-21
9.2 Lineare Gleichungssysteme (LGS) . . . . .	9-26
9.2.1 Grundbegriffe . . . . .	9-26
9.2.2 Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme - Gaußscher Algorithmus . . . . .	9-28
9.2.3 Pivotisieren . . . . .	9-35
9.2.4 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme . . . . .	9-40
9.2.5 Berechnung der Inversen einer Matrix . . . . .	9-45
9.2.6 Ökonomische Anwendungsbeispiele für lineare Gleichungssysteme . . . . .	9-48
9.2.6.1 Teilebedarfsrechnung, Stücklistenauflösung . . . . .	9-48
9.2.6.2 Innerbetriebliche Leistungsverrechnung . . . . .	9-50
<b>10 Lineare Optimierung (LO) . . . . .</b>	<b>10-1</b>
10.1 Grundlagen und graphische Lösungsmethode . . . . .	10-1
10.1.1 Ein Problem der Produktionsplanung . . . . .	10-1
10.1.2 Graphische Lösung des Produktionsplanungsproblems ..	10-2
10.1.3 Ein Diät-Problem . . . . .	10-4
10.1.4 Graphische Lösung des Diät-Problems . . . . .	10-5
10.1.5 Sonderfälle bei graphischer Lösung . . . . .	10-7
10.1.6 Graphische Lösung von LO-Problemen - Zusammenfassung . . . . .	10-10
10.2 Simplexverfahren . . . . .	10-12
10.2.1 Mathematisches Modell des allgemeinen LO-Problems .	10-12
10.2.2 Grundidee des Simplexverfahrens . . . . .	10-14
10.2.3 Einführung von Schlupfvariablen . . . . .	10-14
10.2.4 Eckpunkte und Basislösungen . . . . .	10-15
10.2.5 Optimalitätskriterium . . . . .	10-17
10.2.6 Engpaßbedingung . . . . .	10-19
10.2.7 Simplexverfahren im Standard-Maximum-Fall - Zusammenfassung . . . . .	10-20
10.2.8 Beispiel zum Simplexverfahren (Standard-Maximum-Problem) . . . . .	10-21

10.3	Zweiphasenmethode zur Lösung beliebiger LO-Probleme. . . . .	10-24
10.4	Sonderfälle bei LO-Problemen . . . . .	10-31
10.4.1	Keine zulässige Lösung . . . . .	10-31
10.4.2	Keine endliche optimale Lösung (unbeschränkte Lösung). . . . .	10-32
10.4.3	Degeneration (Entartung). . . . .	10-32
10.4.4	Mehrdeutige optimale Lösungen. . . . .	10-34
10.4.5	Fehlen von Nichtnegativitätsbedingungen . . . . .	10-36
10.4.6	Ablaufdiagramm des Simplexverfahrens im allgemeinen Fall. . . . .	10-37
10.5	Die ökonomische Interpretation des optimalen Simplextableaus . . . . .	10-38
10.5.1	Produktionsplanungsproblem . . . . .	10-38
10.5.1.1	Problemformulierung, Einführung von Einheiten . . . . .	10-38
10.5.1.2	Optimaltableau und optimale Basislösung. . . . .	10-40
10.5.1.3	Deutung der Zielfunktionskoeffizienten . . . . .	10-41
10.5.1.4	Deutung der inneren Koeffizienten. . . . .	10-42
10.5.1.5	Zusammenfassung . . . . .	10-44
10.5.2	Diätproblem . . . . .	10-44
10.6	Dualität. . . . .	10-46
10.6.1	Das duale LO-Problem . . . . .	10-46
10.6.2	Dualitätssätze. . . . .	10-48
10.7	Ökonomische Interpretation des Dualproblems. . . . .	10-51
10.7.1	Dual eines Produktionsplanungsproblems. . . . .	10-52
10.7.2	Dual eines Diätproblems. . . . .	10-53
<b>11</b>	<b>Literaturverzeichnis. . . . .</b>	<b>II-1</b>
<b>12</b>	<b>Sachwortverzeichnis. . . . .</b>	<b>12-1</b>