

Jürgen Tietze

Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik

11., verbesserte Auflage

Mit 500 Abbildungen und 1300 Übungsaufgaben

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V
Symbolverzeichnis	XV
Abkürzungen, Variablennamen, griechisches Alphabet	XVI
1 Grundlagen und Hilfsmittel	1-1
1.1 Mengen und Aussagen	1-1
1.1.1 Mengenbegriff	1-1
1.1.2 Spezielle Zahlenmengen	1-3
1.1.3 Aussagen und Aussageformen	1-5
1.1.4 Verknüpfungen von Aussagen und Aussageformen	1-9
1.1.4.1 Konjunktion	1-9
1.1.4.2 Disjunktion	1-10
1.1.4.3 Negation	1-11
1.1.4.4 Zusammengesetzte Aussagen	1-11
1.1.5 Folgerung (Implikation) und Äquivalenz	1-14
1.1.5.1 Folgerung (Implikation)	1-14
1.1.5.2 Äquivalenz	1-16
1.1.6 Relationen zwischen Mengen	1-17
1.1.6.1 Gleichheit zweier Mengen	1-17
1.1.6.2 Teilmengen	1-17
1.1.7 Verknüpfungen (Operationen) mit Mengen	1-18
1.1.7.1 Durchschnittsmenge	1-18
1.1.7.2 Vereinigungsmenge	1-18
1.1.7.3 Restmenge (Differenzmenge)	1-19
1.1.8 Paarmengen, Produktmengen	1-21
1.2 Arithmetik im Bereich der reellen Zahlen	1-23
1.2.1 Grundregeln (Axiome) und elementare Rechenregeln in \mathbb{R}	1-23
1.2.1.1 Axiome	1-23
1.2.1.2 Elementare Rechenregeln für reelle Zahlen ...	1-26
1.2.1.3 Betrag einer Zahl	1-31
1.2.1.4 Das Summenzeichen	1-32
1.2.1.5 Das Produktzeichen	1-35
1.2.1.6 Fakultät und Binomialkoeffizient	1-35
1.2.2 Potenzen	1-37
1.2.2.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten	1-37
1.2.2.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	1-40
1.2.2.3 Potenzen mit rationalen (gebrochenen) Exponenten; Wurzeln	1-41

1.2.2.4	Potenzen mit reellen Exponenten	1-44
1.2.3	Logarithmen	1-46
1.2.3.1	Begriff des Logarithmus	1-46
1.2.3.2	Logarithmenbasen	1-47
1.2.3.3	Rechenregeln für Logarithmen	1-48
1.2.3.4	Logarithmen zu beliebiger Basis	1-50
1.2.4	Gleichungen	1-51
1.2.4.1	Allgemeines über Gleichungen und deren Lösungen	1-51
1.2.4.2	Äquivalenzumformungen	1-54
1.2.4.3	Lineare Gleichungen $ax + b = ex + d$	1-58
1.2.4.4	Lineare Gleichungssysteme (LGS)	1-59
1.2.4.5	Quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$	1-63
1.2.4.6	Gleichungen höheren als zweiten Grades	1-67
1.2.4.7	Wurzelgleichungen	1-70
1.2.4.8	Exponentialgleichungen	1-71
1.2.4.9	Logarithmengleichungen	1-72
1.2.4.10	Bruchgleichungen	1-73
1.2.5	Ungleichungen	1-74
1.2.6	Wo steckt der Fehler?	1-78
1.2.6.1	Fehler bei Termumformungen	1-78
1.2.6.2	Fehler bei der Lösung von Gleichungen	1-80
1.2.6.3	Fehler bei der Lösung von Ungleichungen	1-82
2	Funktionen einer unabhängigen Variablen	2-1
2.1	Begriff und Darstellung von Funktionen	2-1
2.1.1	Funktionsbegriff	2-1
2.1.2	Graphische Darstellung von Funktionen	2-6
2.1.3	Abschnittsweise definierte Funktionen	2-11
2.1.4	Umkehrfunktionen	2-14
2.1.5	Implizite Funktionen	2-19
2.1.6	Verkettete Funktionen	2-20
2.2	Eigenschaften von Funktionen	2-22
2.2.1	Beschränkte Funktionen	2-22
2.2.2	Monotone Funktionen	2-23
2.2.3	Symmetrische Funktionen	2-24
2.2.4	Nullstellen von Funktionen	2-25
2.3	Elementare Typen von Funktionen	2-26
2.3.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome)	2-26
2.3.1.1	Grundbegriffe, Horner-Schema	2-26
2.3.1.2	Konstante und lineare Funktionen	2-28
2.3.1.3	Quadratische Funktionen	2-35
2.3.1.4	Nullstellen von Polynomen und Polynomzerlegung	2-38
2.3.2	Gebrochen-rationale Funktionen	2-41
2.3.3	Algebraische Funktionen (Wurzelfunktionen)	2-43

2.3.4	Exponentialfunktionen	2-46
2.3.5	Logarithmusfunktionen	2-48
2.3.6	Trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen, Winkelfunktionen).	2-49
2.4	Iterative Gleichungslösung und Nullstellenbestimmung (Regula falsi).	2-55
2.5	Beispiele ökonomischer Funktionen	2-59
3	Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen.	3-1
3.1	Begriff von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	3-1
3.2	Darstellung einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen	3-2
3.3	Homogenität von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	3-13
4	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen	4-1
4.1	Der Grenzwertbegriff	4-1
4.1.1	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow x_0$	4-2
4.1.2	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow \infty$ (bzw. $x \rightarrow -\infty$)	4-6
4.2	Grenzwerte spezieller Funktionen	4-13
4.3	Die Grenzwertsätze und ihre Anwendungen	4-15
4.4	Der Stetigkeitsbegriff	4-20
4.5	Unstetigkeitstypen	4-22
4.6	Stetigkeitsanalyse	4-24
4.7	Stetigkeit ökonomischer Funktionen	4-27
4.8	Asymptoten	4-30
5	Differentialrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen - Grundlagen und Technik.	5-1
5.1	Grundlagen der Differentialrechnung	5-1
5.1.1	Problemstellung	5-1
5.1.2	Durchschnittliche Funktionssteigung (Sekantensteigung) und Differenzenquotient	5-2
5.1.3	Steigung und Ableitung einer Funktion (Differentialquotient).	5-3
5.1.4	Differenzierbarkeit und Stetigkeit	5-7
5.2	Technik des Differenzierens	5-9
5.2.1	Die Ableitung der Grundfunktionen	5-9
5.2.1.1	Ableitung der konstanten Funktion $f(x) = C$...	5-9
5.2.1.2	Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = x^n$	5-10
5.2.1.3	Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$...	5-12
5.2.1.4	Ableitung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$	5-12
5.2.2	Ableitungsregeln	5-14
5.2.2.1	Faktorregel	5-14
5.2.2.2	Summenregel	5-15
5.2.2.3	Produktregel	5-16

5.2.2.4	Quotientenregel	5-17
5.2.2.5	Kettenregel	5-19
5.2.3	Ergänzungen zur Ableitungstechnik	5-23
5.2.3.1	Ableitung der Umkehrfunktion	5-23
5.2.3.2	Ableitung allgemeiner Exponential- und Logarithmusfunktionen	5-24
5.2.3.3	Logarithmische Ableitung	5-27
5.2.4	Höhere Ableitungen	5-28
5.2.5	Zusammenfassung der wichtigsten Differentiationsregeln	5-30
5.3	Grenzwerte bei unbestimmten Ausdrücken - Regeln von de L'Hôpital	5-31
5.4	Newton-Verfahren zur näherungsweisen Ermittlung von Nullstellen einer Funktion	5-39

Anwendungen der Differentialrechnung bei Funktionen

mit einer unabhängigen Variablen. 6-1

6.1	Zur ökonomischen Interpretation der ersten Ableitung	6-1
6.1.1	Das Differential einer Funktion	6-1
6.1.2	Die Interpretation der 1. Ableitung als (ökonomische) Grenzfunktion	6-4
6.1.2.1	Grenzkosten	6-6
6.1.2.2	Grenzerlös (Grenzumsatz, Grenzausgaben) ...	6-7
6.1.2.3	Grenzproduktivität (Grenzertrag)	6-9
6.1.2.4	Grenzwinn	6-10
6.1.2.5	Marginale Konsumquote	6-12
6.1.2.6	Marginale Sparquote	6-12
6.1.2.7	Grenzrate der Substitution	6-13
6.1.2.8	Grenzfunktion und Durchschnittsfunktion	6-14
6.2	Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung von Funktionen	6-18
6.2.1	Monotonie- und Krümmungsverhalten	6-18
6.2.2	Extremwerte	6-22
6.2.3	Wendepunkte	6-26
6.2.4	Kurvendiskussion	6-28
6.2.5	Extremwerte bei nichtdifferenzierbaren Funktionen	6-33
6.3	Die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Probleme	6-36
6.3.1	Beschreibung ökonomischer Prozesse mit Hilfe von Ableitungen	6-36
6.3.1.1	Beschreibung des Wachstumsverhaltens ökonomischer Funktionen	6-37
6.3.1.2	Konstruktion ökonomischer Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften	6-40
6.3.2	Analyse und Optimierung ökonomischer Funktionen ...	6-42
6.3.2.1	Fahrstrahlanalyse	6-43
6.3.2.2	Diskussion ökonomischer Funktionen	6-46

6.3.2.3	Gewinnmaximierung	6-48
6.3.2.4	Gewinnmaximierung bei doppelt-geknickter Preis-Absatz-Funktion	6-55
6.3.2.5	Optimale Lagerhaltung	6-57
6.3.3	Die Elastizität ökonomischer Funktionen	6-67
6.3.3.1	Änderungen von Funktionen	6-67
6.3.3.2	Begriff, Bedeutung und Berechnung der Elastizität von Funktionen	6-69
6.3.3.3	Elastizität ökonomischer Funktionen	6-75
6.3.3.4	Graphische Ermittlung der Elastizität	6-82
6.3.4	Überprüfung ökonomischer Gesetzmäßigkeiten mit Hilfe der Differentialrechnung	6-86
7	Differentialrechnung bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen.	7-1
7.1	Grundlagen	7-1
7.1.1	Begriff und Berechnung von partiellen Ableitungen	7-1
7.1.2	Ökonomische Interpretation partieller Ableitungen	7-7
7.1.3	Partielle Ableitung höherer Ordnung	7-9
7.1.4	Kennzeichnung von Monotonie und Krümmung durch partielle Ableitungen	7-10
7.1.5	Partielles und vollständiges (totales) Differential	7-12
7.1.6	Kettenregel, totale Ableitung	7-15
7.1.7	Ableitung impliziter Funktionen	7-19
7.2	Extrema bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	7-23
7.2.1	Relative Extrema ohne Nebenbedingungen	7-23
7.2.2	Extremwerte unter Nebenbedingungen	7-25
	7.2.2.1 Problemstellung	7-25
	7.2.2.2 Variablensubstitution	7-27
	7.2.2.3 Lagrange-Methode	7-28
7.3	Beispiele für die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	7-31
7.3.1	Partielle Elastizitäten	7-32
	7.3.1.1 Begriff der partiellen Elastizität	7-32
	7.3.1.2 Die Eulersche Homogenitätsrelation	7-33
	7.3.1.3 Elastizität homogener Funktionen	7-34
	7.3.1.4 Faktorentlohnung und Verteilung des Produktes	7-37
7.3.2	Ökonomische Beispiele für relative Extrema (ohne Nebenbedingungen)	7-43
	7.3.2.1 Optimaler Faktoreinsatz in der Produktion	7-43
	7.3.2.2 Gewinnmaximierung von Mehrproduktunternehmen	7-47
	7.3.2.3 Gewinnmaximierung bei räumlicher Preisdifferenzierung	7-52

7.3.2.4	Die Methode der kleinsten Quadrate.	7-56
7.3.3	Ökonomische Beispiele für Extrema unter Nebenbedingungen.	7-59
7.3.3.1	Minimalkostenkombination.	7-59
7.3.3.2	Expansionspfad, Faktornachfrage- und Gesamtkostenfunktion.	7-66
7.3.3.3	Nutzenmaximierung und Haushaltsoptimum ...	7-70
7.3.3.4	Nutzenmaximale Güternachfrage- und Konsumfunktionen.	7-77
8	Einführung in die Integralrechnung	8-1
8.1	Das unbestimmte Integral.	8-1
8.1.1	Stammfunktion und unbestimmtes Integral.	8-1
8.1.2	Grundintegrale.	8-4
8.1.3	Elementare Rechenregeln für das unbestimmte Integral	8-5
8.2	Das bestimmte Integral.	8-7
8.2.1	Das Flächeninhaltsproblem und der Begriff des bestimmten Integrals.	8-7
8.2.2	Beispiel zur elementaren Berechnung eines bestimmten Integrals.	8-10
8.2.3	Elementare Eigenschaften des bestimmten Integrals	8-11
8.3	Beziehungen zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral	8-12
8.3.1	Integralfunktion.	8-12
8.3.2	Der 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	8-13
8.3.3	Der 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	8-15
8.3.4	Flächeninhaltsberechnung	8-17
8.4	Spezielle Integrationstechniken	8-19
8.4.1	Partielle Integration.	8-19
8.4.2	Integration durch Substitution.	8-21
8.5	Ökonomische Anwendungen der Integralrechnung.	8-23
8.5.1	Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktionen.	8-23
8.5.2	Die Konsumentenrente.	8-26
8.5.3	Die Produzentenrente.	8-28
8.5.4	Kontinuierliche Zahlungsströme.	8-29
8.5.5	Kapitalstock und Investitionen einer Volkswirtschaft ...	8-33
8.5.6	Optimale Nutzungsdauer von Investitionen.	8-34
8.6	Elementare Differentialgleichungen.	8-38
8.6.1	Einleitung.	8-38
8.6.2	Lösung von Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen.	8-39
8.6.3	Ökonomische Anwendungen separabler Differentialgleichungen.	8-42
8.6.3.1	Exponentielles Wachstum.	8-42
8.6.3.2	Funktionen mit vorgegebener Elastizität	8-42
8.6.3.3	Neoklassisches Wachstumsmodell nach Solow	8-44

9	Einführung in die Lineare Algebra	91
9.1	Matrizen und Vektoren	9-1
9.1.1	Grundbegriffe der Matrizenrechnung	9-1
9.1.2	Spezielle Matrizen und Vektoren	9-6
9.1.3	Operationen mit Matrizen	9-7
9.1.3.1	Addition von Matrizen	9-7
9.1.3.2	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalarfaktor	9-9
9.1.3.3	Die skalare Multiplikation zweier Vektoren (Skalarprodukt)	9-11
9.1.3.4	Multiplikation von Matrizen	9-12
9.1.4	Die inverse Matrix	9-19
9.1.5	Ökonomisches Anwendungsbeispiel (Input-Output-Analyse)	9-21
9.2	Lineare Gleichungssysteme (LGS)	9-26
9.2.1	Grundbegriffe	9-26
9.2.2	Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme - Gaußscher Algorithmus	9-28
9.2.3	Pivotisieren	9-35
9.2.4	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	9-40
9.2.5	Berechnung der Inversen einer Matrix	9-45
9.2.6	Ökonomische Anwendungsbeispiele für lineare Gleichungssysteme	9-48
9.2.6.1	Teilebedarfsrechnung, Stücklistenauflösung	9-48
9.2.6.2	Innerbetriebliche Leistungsverrechnung	9-50
10	Lineare Optimierung (LO)	10-1
10.1	Grundlagen und graphische Lösungsmethode	10-1
10.1.1	Ein Problem der Produktionsplanung	10-1
10.1.2	Graphische Lösung des Produktionsplanungsproblems	10-2
10.1.3	Ein Diät-Problem	10-4
10.1.4	Graphische Lösung des Diät-Problems	10-5
10.1.5	Sonderfälle bei graphischer Lösung	10-7
10.1.6	Graphische Lösung von LO-Problemen - Zusammenfassung	10-10
10.2	Simplexverfahren	10-12
10.2.1	Mathematisches Modell des allgemeinen LO-Problems	10-12
10.2.2	Grundidee des Simplexverfahrens	10-14
10.2.3	Einführung von Schlupfvariablen	10-14
10.2.4	Eckpunkte und Basislösungen	10-15
10.2.5	Optimalitätskriterium	10-17
10.2.6	Engpaßbedingung	10-19
10.2.7	Simplexverfahren im Standard-Maximum-Fall - Zusammenfassung	10-20
10.2.8	Beispiel zum Simplexverfahren (Standard-Maximum-Problem)	10-21

10.3	Zweiphasenmethode zur Lösung beliebiger LO-Probleme.	10-24
10.4	Sonderfälle bei LO-Problemen.	10-31
10.4.1	Keine zulässige Lösung.	10-31
10.4.2	Keine endliche optimale Lösung (unbeschränkte Lösung).	10-32
10.4.3	Degeneration (Entartung).	10-32
10.4.4	Mehrdeutige optimale Lösungen.	10-34
10.4.5	Fehlen von Nichtnegativitätsbedingungen.	10-36
10.4.6	Ablaufdiagramm des Simplexverfahrens im allgemeinen Fall.	10-37
10.5	Die ökonomische Interpretation des optimalen Simplextableaus.	10-38
10.5.1	Produktionsplanungsproblem.	10-38
10.5.1.1	Problemformulierung, Einführung von Einheiten.	10-38
10.5.1.2	Optimaltableau und optimale Basislösung.	10-40
10.5.1.3	Deutung der Zielfunktionskoeffizienten.	10-41
10.5.1.4	Deutung der inneren Koeffizienten.	10-42
10.5.1.5	Zusammenfassung.	10-44
10.5.2	Diätproblem.	10-44
10.6	Dualität.	10-46
10.6.1	Das duale LO-Problem.	10-46
10.6.2	Dualitätssätze.	10-48
10.7	Ökonomische Interpretation des Dualproblems.	10-51
10.7.1	Dual eines Produktionsplanungsproblems.	10-52
10.7.2	Dual eines Diätproblems.	10-53

11 Literaturverzeichnis. 11-1

12 Sachwortverzeichnis. 12-1