

# Finanzmathematik für Banker

Von

Dr. Karl Bosch

Professor für angewandte Mathematik  
und Statistik

R. Oldenbourg Verlag München Wien

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort	VIII
Kapitel 1: Zinsrechnung (Rentenrechnung)	1
1.1. Grundbegriffe	1
1.2. Einmalige Einzahlung ohne Zinseszins	1
1.3. Einmalige Einzahlung mit Zinseszins	5
1.3.1. Einmalige Einzahlung bei jährlicher Verzinsung	5
1.3.2. Einmalige Einzahlung bei nicht ganzjähriger Laufzeit der Verzinsung	9
1.3.3. Durchschnittlicher Zinssatz (effektiver Zinssatz oder Rendite)	10
1.3.4. Einmalige Einzahlung bei unterjährigen Zinsperioden	12
1.3.5. Stetige (kontinuierliche) Verzinsung einer einmaligen Einzahlung	15
1.4. Regelmäßige Einzahlungen mit Zinseszins (Rentenrechnung)	18
1.4.1. Allgemeine jährliche vorschüssige Einzahlungen	18
1.4.2. Konstante jährliche vorschüssige Einzahlungen (konstante vorschüssige Rentenzahlungen)	19
1.4.3. Allgemeine jährliche nachschüssige Einzahlungen	24
1.4.4. Konstante jährliche nachschüssige Einzahlungen (konstante vorschüssige Rentenzahlungen)	25
1.4.5. Unterjährige konstante Einzahlungen bei jährlicher Verzinsung (unterjährige Rentenzahlungen)	28
1.4.5.1. Nachschüssige unterjährige Einzahlungen (Rentenzahlungen)	29
1.4.5.2. Nachschüssige unterjährige Einzahlungen (Rentenzahlungen)	33
1.4.6. Arithmetisch wachsende jährliche Einzahlungen (Rentenzahlungen)	36
1.4.6.1. Arithmetisch wachsende vorschüssige Jahreseinzahlungen	36
1.4.6.2. Arithmetisch wachsende nachschüssige Jahreseinzahlungen	40
1.4.7. Jährlich arithmetisch wachsende unterjährige Einzahlungen (Rentenzahlungen)	41
1.4.7.1. Jährlich arithmetisch wachsende vorschüssige unterjährige Einzahlungen (arithmetisch wachsende Rentenzahlungen)	41
1.4.7.2. Jährlich arithmetisch wachsende nachschüssige unterjährige Einzahlungen (arithmetisch wachsende Rentenzahlungen)	45
1.4.8. Geometrisch wachsende jährliche Einzahlungen	48
1.4.8.1. Geometrisch wachsende vorschüssige Jahreseinzahlungen	48
1.4.8.2. Geometrisch wachsende nachschüssige Jahreseinzahlungen	51
1.4.9. Jährlich geometrisch wachsende unterjährige Einzahlungen	53
1.4.9.1. Jährlich geometrisch wachsende vorschüssige unterjährige Einzahlungen	53
1.4.9.2. Jährlich geometrisch wachsende nachschüssige unterjährige Einzahlungen	55

Kapitel 2: Rentenzahlungen aus einem Kapital	58
2.1. Allgemeine Rentenzahlungen	58
2.2. Konstante unterjährige Rentenzahlungen	58
2.3. Jährlich arithmetisch wachsende unterjährige Rentenzahlungen	67
2.4. Jährlich geometrisch wachsende unterjährige Rentenzahlungen	72
Kapitel 3: Tilgungsrechnung (Rückzahlung von Krediten)	79
3.1. Grundbegriffe	79
3.2. Ratentilgung (Ratenkredit oder Tilgungskredit)	79
3.2.1 Jährliche Ratentilgung	79
3.2.2. Unterjährige Ratentilgung	82
3.2.3. Tilgungszahlungen mit laufenden Gebühren	85
3.2.3.1. Konstante Gebühren	85
3.2.3.2. Tilgungsaufgeld	85
3.2.3.3. Prozentuale Gebühren von der Restschuld aus dem Vorjahr	86
3.3. Annuitätentilgung	87
3.3.1. Jährliche konstante Annuitäten	87
3.3.2. Unterjährige konstante Annuitäten bei jährlicher Verzinsung	96
3.3.3. Arithmetisch wachsende Jahresannuitäten	98
3.3.4. Jährlich arithmetisch wachsende unterjährige Annuitäten	101
3.3.5. Geometrisch wachsende Jahresannuitäten	102
3.3.6. Jährlich geometrisch wachsende unterjährige Annuitäten	106
3.3.7. Unterjährige Annuitätenzahlungen bei unterjähriger Verzinsung	107
3.3.8. Annuitätenzahlungen mit Tilgungsaufgeld	108
3.3.8.1. Jährliche Annuitätenzahlungen mit zusätzlichem Tilgungsaufgeld	108
3.3.8.2. Unterjährige Annuitätenzahlungen mit zusätzlichem Tilgungsaufgeld	109
3.3.8.3. Jährliche Annuitätenzahlungen mit eingeschlossenem Tilgungsaufgeld	109
3.3.8.4. Unterjährige Annuitätenzahlungen mit eingeschlossenem Tilgungsaufgeld	118
3.3.9. Annuitätentilgung mit Restschuldgebühr	118
3.3.9.1. Jährliche Annuitätentilgung mit zusätzlicher Restschuldgebühr	118
3.3.9.2. Jährliche Annuitätentilgung mit eingeschlossener Restschuldgebühr	119
3.4. Kredite mit Auszahlungsgebühren (Disagio, Damnum)	121
3.4.1. Disagio bei Ratenkrediten	121
3.4.2. Disagio und Zinsfestschreibung (Zinsbindung) bei Annuitäten	122

Kapitel 4:	Kurs- und Renditerechnung . . . . .	124
4.1.	Grundbegriffe. . . . .	124
4.2.	Kurs und Rendite einer Nullkupon-Anleihe (Zerobond) . . . . .	126
4.2.1.	Kurs einer Nullkupon-Anleihe bei ganzjähriger Laufzeit . . . . .	127
4.2.2.	Kurs einer Nullkupon - Anleihe bei beliebiger Laufzeit . . . . .	129
4.3.	Kurs und Rendite einer Zinsanleihe (Zinsschuld) mit eventuellem Tilgungsaufgeld (festverzinsliches Wertpapier) . . . . .	130
4.3.1.	Zinsanleihen mit jährlicher Zinszahlung. . . . .	131
4.3.1.1.	Kurs der Zinsanleihe bei einer ganzjährigen Laufzeit n . . . . .	131
4.3.1.2.	Kurs der Zinsanleihe bei beliebiger Laufzeit . . . . .	136
4.3.1.3.	Börsennotierte Nettokurse einer Zinsanleihe-Stückzinsen . . . . .	137
4.3.2.	Ewige Zinsanleihe mit jährlicher Zinszahlung. . . . .	140
4.3.2.1.	Kurs unmittelbar nach der jährlichen Zinszahlung . . . . .	140
4.3.2.2.	Kurs x Jahre nach einer Zinszahlung mit $0 < x < 1$ . . . . .	141
4.3.3.	Anleihen mit unterjähriger Verzinsung. . . . .	142
4.3.3.1.	Kurse bei ganzjähriger Laufzeit n . . . . .	142
4.3.3.2.	Kurse zu unterjährigen Zeitpunkten. . . . .	145
4.3.3.2.1.	Kurse zu den Zeitpunkten der unterjährigen Zinszahlungstermine. . . . .	145
4.3.3.2.2.	Kurs zwischen den unterjährigen Zinszahlungsterminen . . . . .	147
4.3.4.	Anleihen bei unterjähriger Verzinsung mit Zinseszins . . . . .	149
Kapitel 5:	Aktien und Termingeschäfte (Futures, Optionen und Optionsscheine)... . . . .	151
5.1.	Aktien. . . . .	151
5.2.	Termingeschäfte. . . . .	153
5.3.	Optionen. . . . .	155
5.3.1.	Europäishce Kaufoptionen (Calls) auf Aktien. . . . .	155
5.3.1.1.	Grundlagen. . . . .	155
5.3.1.2.	Gewinnmöglichkeiten mit einem Call am Verfallstag . . . . .	156
5.3.1.3.	Bewertung von Calls. . . . .	159
5.3.1.3.1.	Der innere Wert eines Calls. . . . .	159
5.3.1.3.2.	Zeitwert und Kurs (Preis) eines Calls. . . . .	159
5.3.1.3.3.	Kennzahlen für die Bewertung eines Calls. . . . .	159
5.3.2.	Europäische Verkaufsoptionen (Puts) auf Aktien . . . . .	163
5.3.2.1.	Grundlagen. . . . .	163
5.3.2.2.	Gewinnmöglichkeiten mit einem Put am Verfallstag . . . . .	163
5.3.2.3.	Bewertung von Puts. . . . .	165
5.3.2.3.1.	Der innere Wert eines Puts. . . . .	165
5.3.2.3.2.	Zeitwert und Kurs (Preis) eines Puts. . . . .	166
5.3.2.3.3.	Kennzahlen für die Bewertung eins Puts. . . . .	166
5.4.	Optionsscheine (Warrants) auf Aktien. . . . .	167
Anhang:	Mathematische Formeln und Bezeichnungen . . . . .	170