

Lehrgang der höheren Mathematik

Teill

von W. I. Smirhow

Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR

Mit 190 Abbildungen

Sechzehnte Auflage

Verlag Harri Deutsch

W Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik I

,'. teutsfike? Veilaj der Wisseacelia-ften

ISBN 3-8171-1297-1

Inhalt

I. Funktionale Abhängigkeit und Theorie der Grenzwerte.	15
§ 1. Veränderliche Größen	15
1. Die Größe und ihre Maßbestimmung	15
2. Die Zahl	15
3. Konstante und veränderliche Größen	17
4. Das Intervall	18
5. Der Funktionsbegriff	19
6. Die analytische Darstellung einer funktionalen Abhängigkeit	21
7. Implizite Funktionen	22
8. Die Tabellenmethode	23
9. Die graphische Darstellung der Zahlen	24
10. Koordinaten	25
11. Bild und Gleichung einer Kurve	26
12. Die lineare Funktion	28
13. Der Zuwachs. Die Fundamentaleigenschaft der linearen Funktion	29
14. Die Bildkurve der gleichförmigen Bewegung	30
15. Empirische Formeln	31
16. Die Parabel zweiten Grades	33
17. Die Parabel dritten Grades	35
18. Das Gesetz der umgekehrten Proportionalität	37
19. Die Potenz	38
20. Inverse Funktionen	40
21. Mehrdeutigkeit einer Funktion	41
22. Die Exponentialfunktion und der Logarithmus	44
23. Die trigonometrischen Funktionen	46
24. Die inversen der trigonometrischen oder die zyklotometrischen Funktionen	48
§ 2. Theorie der Grenzwerte. Stetige Funktionen	50
25. Die geordnete Veränderliche	50
26. Die unendlich kleinen Größen	52
27. Grenzwert einer veränderlichen Größe	56
28. Fundamentalsätze i.	60
29. Die unendlich großen Größen	62
30. Die monotonen Veränderlichen	64
31. Das Cauchysche Konvergenzkriterium	65
32. Gleichzeitige Änderung zweier veränderlicher Größen, die durch eine funktionale Abhängigkeit verknüpft sind	68
33. Beispiele	72
34. Stetigkeit einer Funktion	73
35. Eigenschaften der stetigen Funktionen	75
36. Vergleich von unendlich kleinen und von unendlich großen Größen	78
37. Beispiele	80
38. Die Zahl e	81

39. Die nicht bewiesenen Sätze	84
40. Die reellen Zahlen	86
41. Die Rechenoperationen mit reellen Zahlen	88
42. Obere und untere Grenze einer Zahlenmenge. Kriterien für die Existenz eines Grenzwertes	90
43. Die Eigenschaften der stetigen Funktionen	91
44. Die Stetigkeit der elementaren Funktionen	94
 II. Der Begriff der Ableitung und seine Anwendungen	98
§ 3. Die Ableitung und das Differential erster Ordnung	98
45. Der Begriff der Ableitung	98
46. Die geometrische Bedeutung der Ableitung	100
47. Die Ableitungen der einfachsten Funktionen	102
48. Die Ableitungen der mittelbaren und der inversen Funktionen	105
49. Tafel der Ableitungen. Beispiele	109
50. Der Begriff des Differentials	111
51. Einige Differentialgleichungen	114
52. Fehlerabschätzung	116
§ 4. Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung	117
53. Die Ableitungen höherer Ordnung	117
54. Die physikalische Bedeutung der zweiten Ableitung	119
55. Differentiale höherer Ordnung	121
56. Differenzen von Funktionen	122
§ 5. Die Anwendung des Begriffs der Ableitung bei der Untersuchung von Funktionen	123
57. Kriterien für das Zunehmen und Abnehmen einer Funktion	123
58. Maxima und Minima von Funktionen	127
59. Die Konstruktion von Bildkurven	131
60. Größter und kleinster Wert einer Funktion	134
61. Der Satz von FERMAT	140
62. Der Satz von ROLLE	141
63. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Formel von LAGRANGE)	143
64. Erweiterter Mittelwertsatz (Formel von CAUCHY)	145
65. Auswertung unbestimmter Ausdrücke	146
66. Verschiedene Formen unbestimmter Ausdrücke	148
§ 6. Funktionen zweier Veränderlicher	151
67. Grundbegriffe	151
68. Die partiellen Ableitungen und das vollständige Differential einer Funktion zweier unabhängiger Veränderlicher	153
69. Die Ableitungen der mittelbaren und der impliziten Funktionen	155
§ 7. Einige geometrische Anwendungen des Begriffs der Ableitung	156
70. Das Bogendifferential	156
71. Konvexität, Konkavität und Krümmung	158
72. Die Asymptoten	161
73. Konstruktion der Bildkurve	163
74. Parameterdarstellung einer Kurve	165
75. Die van-der-Waalsche Gleichung	169
76. Singuläre Kurvenpunkte	170
77. Kurvenelemente	174

78. Die Kettenlinie	176
79. Die Zykloide	177
80. Epizykloiden und Hypozykloiden	179
81. Die Kreisevolvente	182
82. Kurven in Polarkoordinaten	182
83. Spiralen	184
84. Die Schnecken und die Kardioide	186
85. Die Cassinischen Kurven und die Lemniskate	188
 III. Der Begriff des Integrals und seine Anwendungen	190
§ 8. Die Grundaufgabe der Integralrechnung und das unbestimmte Integral	190
86. Der Begriff des unbestimmten Integrals	190
87. Das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe	193
88. Der Zusammenhang zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral	198
89. Die Eigenschaften des unbestimmten Integrals	202
90. Tafel der einfachsten Integrale	203
91. Partielle Integration	203
92. Substitution der Veränderlichen. Beispiele	204
93. Beispiele von Differentialgleichungen erster Ordnung	208
§ 9. Die Eigenschaften des bestimmten Integrals	211
94. Die Fundamentaleigenschaften des bestimmten Integrals	211
95. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung	214
96. Die Existenz einer Stammfunktion	217
97. Unstetigkeit des Integranden	218
98. Unendliche Grenzen	221
99. Die Substitution der Veränderlichen in einem bestimmten Integral	222
100. Partielle Integration	224
§ 10. Anwendungen des bestimmten Integrals	226
101. Berechnung von Flächeninhalten	226
102. Der Flächeninhalt eines Sektors	230
103. Die Bogenlänge	232
104. Die Berechnung des Volumens von Körpern auf Grund ihrer Querschnitte	238
106. Das Volumen eines Rotationskörpers	240
106. Die Oberfläche eines Rotationskörpers	241
107. Die Bestimmung des Schwerpunktes. Die Guldinschen Regeln	244
108. Angenäherte Berechnung bestimmter Integrale. Die Rechteck- und die Trapezformel	248
109. Die Tangentenfprmel und die Formel von PONCELET	250
110. Die Simpsonsche Formel	251
111. Die Berechnung des bestimmten Integrals mit veränderlicher oberer Grenze	255
112. Graphische Verfahren	255
113. Flächeninhalte bei schnell oszillierenden Kurven	258
§ 11. Ergänzende Ausführungen über das bestimmte Integral	258
114. Vorbereitende Begriffe	258
115. Die Zerlegung eines Intervalls in Teilintervalle und die Bildung verschiedener Summen	260
116. Integrierbare Funktionen	262
117. Eigenschaften der integrierbaren Funktionen	266

IV. Reihen und ihre Anwendung auf die näherungsweise Berechnung von Funktionen	269
, § 12. Grundbegriffe aus der Theorie der unendlichen Reihen.	269
118. Der Begriff der unendlichen Reihe.	269
119. Fundamentaleigenschaften der unendlichen Reihen	270
120. Reihen mit nichtnegativen Gliederrl. Konvergenzkriterien	272
121. Die Konvergenzkriterien von CATICHY und D'ALEMBERT	274
122. Das Cauchysche Integralkriterium für die Konvergenz	277
123. Die alternierenden Reihen.	279
124. Die absolut konvergenten Reihen.	280
125. Ein allgemeines Konvergenzkriterium.	282
§ 13. Die Taylorsche Formel und ihre Anwendungen	283
126. Die Taylorsche Formel	283
127. Verschiedene Darstellungen der Taylorschen Formel	286
128. Die Taylorsche und die Maclaurinsche Reihe.	287
129. Die Reihenentwicklung von e^x	288
130. Die Reihenentwicklung von $\sin x$ und $\cos x$	290
131. Die Newtonsche binomische Reihe.	292
132. Die Reihenentwicklung von $\log(1+x)$	297
133. Die Reihenentwicklung von $\arctan x$	300
134. Näherungsformeln.	302
135. Maxima, Minima, Wendepunkte.	303
136. Auswertung unbestimmter Ausdrücke.	305
§ 14. Ergänzende Ausführungen zur Theorie der Reihen	306
137. Eigenschaften der absolut konvergenten Reihen	306
138. Die Multiplikation absolut konvergenter Reihen.	308
139. Das Kummersche Kriterium.	309
140. Das Gaußsche Kriterium.	311
141. Die hypergeometrische Reihe.	313
142. Doppelreihen	314
143. Reihen mit veränderlichen Gliedern. Gleichmäßig konvergente Reihen	318
144. Gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen	321
145. Eigenschaften der gleichmäßig konvergenten Folgen.	323
146. Eigenschaften der gleichmäßig konvergenten Reihen.	326
147. Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz	327
148. Potenzreihen. Der Konvergenzradius.	329
149. Der zweite Abelsche Satz.	330
150. Differentiation und Integration einer Potenzreihe.	331
V. Funktionen mehrerer Veränderlicher	334
§ 15. Die Ableitungen und Differentiale einer Funktion.	334
151. Grundbegriffe.	334
152. Bemerkungen zum Grenzübergang	335
153. Die partiellen Ableitungen und das vollständige Differential erster Ordnung	337
154. Homogene Funktionen.	339
155. Partielle Ableitungen höherer Ordnung	340
156. Differentiale höherer Ordnung	342
157. Implizite Funktionen.	344
158. Beispiel	346
159. Die Existenz der impliziten Funktion.	347
160. Kurven im Raum und auf Flächen.	349

§ 16. Die Taylorsche Formel. Maxima und Minima einer Funktion mehrerer Veränderlicher	353
161. Die Taylorsche Formel für Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher	353
162. Notwendige Bedingungen für ein Maximum oder Minimum einer Funktion	354
163. Untersuchung der Maxima und Minima einer Funktion zweier unabhängiger Veränderlicher	355
164. Beispiele	358
165. Ergänzende Bemerkungen zur Ermittlung der Maxima und Minima einer Funktion	360
166. Der größte und der kleinste Wert einer Funktion	361
167. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen	363
168. Ergänzende Bemerkungen	364
169. Beispiele	367
VI. Komplexe Zahlen. Anfangsgründe der höheren Algebra und Integration von Funktionen	370
§ 17. Komplexe Zahlen	370
170. Die komplexen Zahlen	370
171. Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	372
172. Multiplikation komplexer Zahlen	374
173. Division komplexer Zahlen	376
174. Das Potenzieren	377
175. Das Wurzelziehen	379
176. Die Exponentialfunktion	381
177. Die trigonometrischen und die hyperbolischen Funktionen	383
178. Die Kettenlinie	386
179. Das Logarithmieren	391
180. Sinusschwingungen und Vektordiagramme	392
181. Beispiele	394
182. Kurven in komplexer Form	397
183. Darstellung der harmonischen Schwingung in komplexer Form	400
§ 18. Fundamentaleigenschaften der ganzen rationalen Funktionen (Polynome) und die Berechnung ihrer Nullstellen	401
184. Die algebraische Gleichung	401
185. Die Zerlegung eines Polynoms in Faktoren	402
186. Mehrfache Nullstellen	403
187. Das Hornersehe Schema	405
188. Der größte gemeinsame Teiler	407
189. Reelle Polynome	408
190. Der Zusammenhang zwischen den Wurzeln einer Gleichung und ihren Koeffizienten	409
191. Die Gleichung dritten Grades	410
192. Die Lösung der kubischen Gleichung in trigonometrischer Form	413
193. Das Iterationsverfahren	416
194. Das Newtonsche Verfahren	420
195. Das Verfahren der linearen Interpolation (Regula falsi)	421
§ 19. Die Integration von Funktionen	423
196. Partialbruchzerlegung	423
197. Integration einer rationalen Funktion	425

14 Inhalt

198. Integration von Ausdrücken, die Radikale enthalten.	427
199. Integrale der Form / $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$;	428
200. Das Integral der Form / $i\sqrt{(\sin x, \cos x) dx}$	431
201. Integrale der Form / $e^{ax}[P(x) \cos 6a; + Q(x) \sin 6a;] dx$;	432
Literaturhinweise.	435
Namen- und Sachverzeichnis.	442