

Lehrgang der höheren Mathematik

Teil I

von W. I. Smirnow

Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR

Mit 190 Abbildungen

Sechzehnte Auflage

Verlag Harri Deutsch

W. Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik I

, ' . teutsfike? Veilaj der Wisseacelia-ften

ISBN 3-8171-1297-1

Inhalt

I. Funktionale Abhängigkeit und Theorie der Grenzwerte.	15
§ 1. Veränderliche Größen	15
1. Die Größe und ihre Maßbestimmung	15
2. Die Zahl	15
3. Konstante und veränderliche Größen	17
4. Das Intervall.	18
5. Der Funktionsbegriff.	19
6. Die analytische Darstellung einer funktionalen Abhängigkeit	21
7. Implizite Funktionen.	22
8. Die Tabellenmethode.	23
9. Die graphische Darstellung der Zahlen.	24
10. Koordinaten.	25
11. Bild und Gleichung einer Kurve.	26
12. Die lineare Funktion.	28
13. Der Zuwachs. Die Fundamentealeigenschaft der linearen Funktion.	29
14. Die Bildkurve der gleichförmigen Bewegung	30
15. Empirische Formeln.	31
16. Die Parabel zweiten Grades.	33
17. Die Parabel dritten Grades.	35
18. Das Gesetz der umgekehrten Proportionalität	37
19. Die Potenz.	38
20. Inverse Funktionen.	40
21. Mehrdeutigkeit einer Funktion.	41
22. Die Exponentialfunktion und der Logarithmus	44
23. Die trigonometrischen Funktionen	46
24. Die inversen der trigonometrischen oder die zyklometrischen Funktionen	48
§ 2. Theorie der Grenzwerte. Stetige Funktionen	50
25. Die geordnete Veränderliche.	50
26. Die unendlich kleinen Größen.	52
27. Grenzwert einer veränderlichen Größe.	56
28. Fundamentalsätze i.	60
29. Die unendlich großen Größen.	62
30. Die monotonen Veränderlichen.	64
31. Das Cauchysche Konvergenzkriterium.	65
32. Gleichzeitige Änderung zweier veränderlicher Größen, die durch eine funktionale Abhängigkeit verknüpft sind.	68
33. Beispiele.	72
34. Stetigkeit einer Funktion.	73
35. Eigenschaften der stetigen Funktionen	75
36. Vergleich von unendlich kleinen und von unendlich großen Größen	78
37. Beispiele.	80
38. Die Zahl e.	81

39. Die nicht bewiesenen Sätze.	84
40. Die reellen Zahlen.	86
41. Die Rechenoperationen mit reellen Zahlen.	88
42. Obere und untere Grenze einer Zahlenmenge. Kriterien für die Existenz eines Grenzwertes.	90
43. Die Eigenschaften der stetigen Funktionen.	91
44. Die Stetigkeit der elementaren Funktionen.	94
II. Der Begriff der Ableitung und seine Anwendungen.	98
§ 3. Die Ableitung und das Differential erster Ordnung	98
45. Der Begriff der Ableitung.	98
46. Die geometrische Bedeutung der Ableitung.	100
47. Die Ableitungen der einfachsten Funktionen.	102
48. Die Ableitungen der mittelbaren und der inversen Funktionen.	105
49. Tafel der Ableitungen. Beispiele.	109
50. Der Begriff des Differentials.	111
51. Einige Differentialgleichungen.	114
52. Fehlerabschätzung.	116
§ 4. Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung.	117
53. Die Ableitungen höherer Ordnung.	117
54. Die physikalische Bedeutung der zweiten Ableitung.	119
55. Differentiale höherer Ordnung.	121
56. Differenzen von Funktionen.	122
§ 5. Die Anwendung des Begriffs der Ableitung bei der Untersuchung von Funktionen.	123
57. Kriterien für das Zunehmen und Abnehmen einer Funktion.	123
58. Maxima und Minima von Funktionen.	127
59. Die Konstruktion von Bildkurven.	131
60. Größter und kleinster Wert einer Funktion.	134
61. Der Satz von FERMAT.	140
62. Der Satz von ROLLE.	141
63. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Formel von LAGRANGE)	143
64. Erweiterter Mittelwertsatz (Formel von CAUCHY).	145
65. Auswertung unbestimmter Ausdrücke.	146
66. Verschiedene Formen unbestimmter Ausdrücke.	148
§ 6. Funktionen zweier Veränderlicher.	151
67. Grundbegriffe.	151
68. Die partiellen Ableitungen und das vollständige Differential einer Funktion zweier unabhängiger Veränderlicher.	153
69. Die Ableitungen der mittelbaren und der impliziten Funktionen ;	155
§ 7. Einige geometrische Anwendungen des Begriffs der Ableitung	156
70. Das Bogendifferential.	156
71. Konvexität, Konkavität und Krümmung.	158
72. Die Asymptoten.	161
73. Konstruktion der Bildkurve.	163
74. Parameterdarstellung einer Kurve.	165
75. Die van-der-Waalssche Gleichung.	169
76. Singuläre Kurvenpunkte.	170
77. Kurvenelemente.	174

78. Die Kettenlinie	176
79. Die Zykloide	177
80. Epizykloiden und Hypozykloiden	179
81. Die Kreisevolvente	182
82. Kurven in Polarkoordinaten	182
83. Spiralen	184
84. Die Schnecken und die Kardioiden	186
85. Die Cassinischen Kurven und die Lemniskate	188
III. Der Begriff des Integrals und seine Anwendungen	190
§ 8. Die Grundaufgabe der Integralrechnung und das unbestimmte Integral	190
86. Der Begriff des unbestimmten Integrals	190
87. Das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe	193
88. Der Zusammenhang zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral	198
89. Die Eigenschaften des unbestimmten Integrals	202
90. Tafel der einfachsten Integrale	203
91. Partielle Integration	203
92. Substitution der Veränderlichen. Beispiele	204
93. Beispiele von Differentialgleichungen erster Ordnung	208
§ 9. Die Eigenschaften des bestimmten Integrals	211
94. Die Fundamenteleigenschaften des bestimmten Integrals	211
95. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung	214
96. Die Existenz einer Stammfunktion	217
97. Unstetigkeit des Integranden	218
98. Unendliche Grenzen	221
99. Die Substitution der Veränderlichen in einem bestimmten Integral	222
100. Partielle Integration	224
§ 10. Anwendungen des bestimmten Integrals	226
101. Berechnung von Flächeninhalten	226
102. Der Flächeninhalt eines Sektors	230
103. Die Bogenlänge	232
104. Die Berechnung des Volumens von Körpern auf Grund ihrer Querschnitte	238
106. Das Volumen eines Rotationskörpers	240
106. Die Oberfläche eines Rotationskörpers	241
107. Die Bestimmung des Schwerpunktes. Die Guldinschen Regeln	244
108. Angenäherte Berechnung bestimmter Integrale. Die Rechteck- und die Trapezformel	248
109. Die Tangentenformel und die Formel von PONCELET	250
110. Die Simpsonsche Formel	251
111. Die Berechnung des bestimmten Integrals mit veränderlicher oberer Grenze	255
112. Graphische Verfahren	255
113. Flächeninhalte bei schnell oszillierenden Kurven	258
§ 11. Ergänzende Ausführungen über das bestimmte Integral	258
114. Vorbereitende Begriffe	258
115. Die Zerlegung eines Intervalls in Teilintervalle und die Bildung verschiedener Summen	260
116. Integrierbare Funktionen	262
117. Eigenschaften der integrierbaren Funktionen	266

IV. Reihen und ihre Anwendung auf die näherungsweise Berechnung von Funktionen . . .	269
§ 12. Grundbegriffe aus der Theorie der unendlichen Reihen.	269
118. Der Begriff der unendlichen Reihe.	269
119. Fundamentealeigenschaften der unendlichen Reihen.	270
120. Reihen mit nichtnegativen Gliedern. Konvergenzkriterien.	272
121. Die Konvergenzkriterien von CAUCHY und D'ALEMBERT.	274
122. Das Cauchysche Integralkriterium für die Konvergenz.	277
123. Die alternierenden Reihen.	279
124. Die absolut konvergenten Reihen.	280
125. Ein allgemeines Konvergenzkriterium.	282
§ 13. Die Taylorsche Formel und ihre Anwendungen.	283
126. Die Taylorsche Formel.	283
127. Verschiedene Darstellungen der Taylorschen Formel.	286
128. Die Taylorsche und die Maclaurinsche Reihe.	287
129. Die Reihenentwicklung von e^x	288
130. Die Reihenentwicklung von $\sin x$ und $\cos x$	290
131. Die Newtonsche binomische Reihe.	292
132. Die Reihenentwicklung von $\log(1+x)$	297
133. Die Reihenentwicklung von $\arctan x$	300
134. Näherungsformeln.	302
135. Maxima, Minima, Wendepunkte.	303
136. Auswertung unbestimmter Ausdrücke.	305
§ 14. Ergänzende Ausführungen zur Theorie der Reihen.	306
137. Eigenschaften der absolut konvergenten Reihen.	306
138. Die Multiplikation absolut konvergenter Reihen.	308
139. Das Kummersche Kriterium.	309
140. Das Gaußsche Kriterium.	311
141. Die hypergeometrische Reihe.	313
142. Doppelreihen.	314
143. Reihen mit veränderlichen Gliedern. Gleichmäßig konvergente Reihen.	318
144. Gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen.	321
145. Eigenschaften der gleichmäßig konvergenten Folgen.	323
146. Eigenschaften der gleichmäßig konvergenten Reihen.	326
147. Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz.	327
148. Potenzreihen. Der Konvergenzradius.	329
149. Der zweite Abelsche Satz.	330
150. Differentiation und Integration einer Potenzreihe.	331
V. Funktionen mehrerer Veränderlicher.	334
§ 15. Die Ableitungen und Differentiale einer Funktion.	334
151. Grundbegriffe.	334
152. Bemerkungen zum Grenzübergang.	335
153. Die partiellen Ableitungen und das vollständige Differential erster Ordnung.	337
154. Homogene Funktionen.	339
155. Partielle Ableitungen höherer Ordnung.	340
156. Differentiale höherer Ordnung.	342
157. Implizite Funktionen.	344
158. Beispiel.	346
159. Die Existenz der impliziten Funktion.	347
160. Kurven im Raum und auf Flächen.	349

§ 16. Die Taylorsche Formel. Maxima und Minima einer Funktion mehrerer Veränderlicher.	353
161. Die Taylorsche Formel für Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher	353
162. Notwendige Bedingungen für ein Maximum oder Minimum einer Funktion . . .	354
163. Untersuchung der Maxima und Minima einer Funktion zweier unabhängiger Veränderlicher.	355
164. Beispiele.	358
165. Ergänzende Bemerkungen zur Ermittlung der Maxima und Minima einer Funktion.	360
166. Der größte und der kleinste Wert einer Funktion.	361
167. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.	363
168. Ergänzende Bemerkungen.	364
169. Beispiele	367

VI. Komplexe Zahlen. Anfangsgründe der höheren Algebra und Integration von Funktionen	370
---	-----

§ 17. Komplexe Zahlen	370
---------------------------------	-----

170. Die komplexen Zahlen.	370
171. Addition und Subtraktion komplexer Zahlen.	372
172. Multiplikation komplexer Zahlen.	374
173. Division komplexer Zahlen.	376
174. Das Potenzieren.	377
175. Das Wurzelziehen.	379
176. Die Exponentialfunktion.	381
177. Die trigonometrischen und die hyperbolischen Funktionen.	383
178. Die Kettenlinie.	386
179. Das Logarithmieren.	391
180. Sinusschwingungen und Vektordiagramme.	392
181. Beispiele.	394
182. Kurven in komplexer Form.	397
183. Darstellung der harmonischen Schwingung in komplexer Form.	400

§ 18. Fundamenteigenschaften der ganzen rationalen Funktionen (Polynome) und die Berechnung ihrer Nullstellen.	401
--	-----

184. Die algebraische Gleichung.	401
185. Die Zerlegung eines Polynoms in Faktoren.	402
186. Mehrfache Nullstellen.	403
187. Das Hornersehe Schema	405
188. Der größte gemeinsame Teiler.	407
189. Reelle Polynome.	408
190. Der Zusammenhang zwischen den Wurzeln einer Gleichung und ihren Koeffizienten.	409
191. Die Gleichung dritten Grades.	410
192. Die Lösung der kubischen Gleichung in trigonometrischer Form.	413
193. Das Iterationsverfahren.	416
194. Das Newtonsche Verfahren.	420
195. Das Verfahren der linearen Interpolation (Regula falsi).	421

§ 19. Die Integration von Funktionen	423
--	-----

196. Partialbruchzerlegung	423
197. Integration einer rationalen Funktion.	425

198. Integration von Ausdrücken, die Radikale enthalten.	427
199. Integrale der Form $\int R(x, \sqrt{Yax^2 + bx + c}) dx$;	428
200. Das Integral der Form $\int \sqrt{\sin x, \cos x} dx$	431
201. Integrale der Form $\int e^{ax} [P(x) \cos bx + Q(x) \sin bx] dx$;	432
Literaturhinweise.	435
Namen- und Sachverzeichnis	442