

Körth / Dück / Kluge / Runge

Wirtschaftsmathematik

Hochschullehrbuch in zwei Bänden

Band 1

Prof. em. Dr. habil. Heinz Körth (2)

Doz. Dr. Günter Zeidler (3)

Prof. Dr. sc. Egon Könze (1.1)

Dr. sc. Fritz Hartl (1,2)

Dr. sc. Wolfgang Heidrich (1,2)

Dr. Karl-Heinz Gärtner (3.6)



Verlag Die Wirtschaft GmbH Berlin · München

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	13
1 Mathematik und Rechentechnik	17
1.1 Zahlendarstellungen in der Rechentechnik	18
1.1.1 Zahlenpositionssysteme	18
Aufgaben	36
1.1.2 Zahlendarstellungen in Rechnern	36
1.1.2.1 Die Darstellung von natürlichen und negativen Zahlen	36
Aufgaben	44
1.1.2.2 Die Darstellung von Dezimalbrüchen	44
Aufgaben	53
1.1.2.3 Darstellung von Zahlen durch Codierung	53
Aufgaben	61
1.1.3 Fehlerbetrachtungen für Zahlendarstellungen im Rechner	62
1.1.3.1 Absolute und relative Fehlerschranken	63
1.1.3.2 Fehlerfortpflanzung bei der Ausführung arithmetischer Operationen	67
Aufgaben	71
1.1.3.3 Sicherung der Codierung durch Prüfzeichen	72
Aufgaben	77
1.2 Logik und Rechentechnik	78
1.2.1 Programmierung und mathematische Logik	78
1.2.2 Grundlagen der zweiwertigen Aussagenlogik	79
1.2.2.1 Aussagen	79
1.2.2.2 Zweistellige logische Operationen mit Aussagen	81
1.2.2.3 Komplexere logische Aussagenverbindungen	86
1.2.2.4 Aussagenlogische Gesetze	87

1.2.2.5	Aussagenlogische Äquivalenzen	89
1.2.2.6	Aussagenlogisches Schließen	91
1.2.2.7	Beweismethoden	93
	Aufgaben	93
1.2.3	Prädikatenlogik der ersten Stufe	94
1.2.3.1	Individuen, Prädikate und prädikatenlogische Ausdrücke	94
1.2.3.2	Prädikatenlogische Gesetze	97
1.2.3.3	Prädikatenlogisches Schließen	98
	Aufgaben	98
2	Lineare Algebra	99
2.1	Beispiele linearer ökonomischer Modelle	100
2.1.1	Transportplanung	100
2.1.2	Mischungsrechnung	102
2.1.3	Verflechtung 1. Art	102
2.1.4	Volkswirtschaftliche Verflechtung	105
2.1.5	Produktionsprogrammplanung	107
2.1.6	Ablaufplanung	108
2.2	Matrizen	110
2.2.1	Matrixbegriff und spezielle Matrizen	110
	Aufgaben	124
2.2.2	Matrizenrelationen	127
2.2.2.1	Gleichheit von Matrizen	127
2.2.2.2	Ungleichheit von Matrizen	129
	Aufgaben	131
2.2.3	Matrizenoperationen	131
2.2.3.1	Transponieren	132
	Aufgaben	134
2.2.3.2	Matrizenaddition und -subtraktion	134
	Aufgaben	136
2.2.3.3	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	139
	Aufgaben	144
2.2.3.4	Multiplikation eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor (Skalarprodukt)	146
	Aufgaben	152
2.2.3.5	Multiplikation von Matrizen	153
	Aufgaben	167
2.2.4	Ökonomische Anwendungen	170
2.2.4.1	Transportplanung	170
2.2.4.2	Mischungsrechnung	172
2.2.4.3	Verflechtung 1. Art (Stufenmodell)	174

2.2.4.4	Volkswirtschaftliche Verflechtung	178
2.2.4.5	Produktionsprogrammplanung	181
2.2.4.6	Ablaufplanung	183
	Aufgaben	185
2.3	Lineare Gleichungssysteme	191
2.3.1	Begriff des linearen Gleichungssystems	191
2.3.2	Umformung linearer Gleichungssysteme (Basistransformation)	197
2.3.2.1	Umformung linearer Gleichungssysteme in die kanonische Form	197
	Aufgaben	218
2.3.2.2	Übergang von einer kanonischen Form in eine andere kanonische Form	219
2.3.3	Lösung linearer Gleichungssysteme	223
	Aufgaben	229
2.3.4	Ökonomische Anwendungen	230
2.3.4.1	Transportplanung	230
2.3.4.2	Mischungsrechnung	236
2.3.4.3	Verflechtung 1. Art (Stufenmodell)	239
2.3.4.4	Volkswirtschaftliche Verflechtung	242
2.3.4.5	Produktionsprogrammplanung	242
	Aufgaben	244
2.4	Linearkombinationen und konvexe Mengen	245
2.4.1	Geometrische Interpretation von Vektoren	245
2.4.2	Linearkombination von Vektoren	247
	Aufgaben	255
2.4.3	Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit von Vektoren	257
	Aufgaben	262
2.4.4	Konvexe Mengen	264
2.4.5	Ökonomische Anwendungen	271
2.4.5.1	Transportplanung	271
2.4.5.2	Mischungsrechnung	272
2.4.5.3	Verflechtung 1. Art (Stufenmodell)	275
2.4.5.4	Volkswirtschaftliche Verflechtung	276
2.4.5.5	Produktionsprogrammplanung	278
2.5	Matrizeninversion und Matrizengleichungen	280
2.5.1	Rang einer Matrix	280
	Aufgaben	284
2.5.2	Matrizeninversion	285
	Aufgaben	288
2.5.3	Matrizengleichungen	289
	Aufgaben	301

2.5.4	Ökonomische Anwendungen	301
2.5.4.1	Verflechtung 1. Art (Stufenmodell)	301
2.5.4.2	Volkswirtschaftliche Verflechtung	313
	Aufgaben	315
2.6	Lineare Ungleichungssysteme	316
2.6.1	Begriff des linearen Ungleichungssystems	316
2.6.2	Lineare Ungleichungssysteme mit einer Variablen	325
2.6.3	Graphische Lösung linearer Ungleichungssysteme	326
	Aufgaben	331
2.6.4	Rechnerische Lösung des normalen linearen Ungleichungssystems	332
2.6.5	Ökonomische Anwendungen	351
2.6.5.1	Transportplanung	351
2.6.5.2	Mischungsrechnung	354
2.6.5.3	Verflechtung 1. Art (Stufenmodell)	358
2.6.5.4	Produktionsprogrammplanung	359
2.6.5.5	Ablaufplanung	360
	Aufgaben	362
2.7	Determinanten	363
2.7.1	Begriff der Determinante	363
	Aufgaben	372
2.7.2	Definitheit quadratischer Formen	372
	Aufgaben	374
2.7.3	Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	375
	Aufgaben	379
3	Analysis	380
3.1	Analysis und Ökonomie	381
3.2	Zahlenfolgen und -reihen	383
3.2.1	Problemstellung und Ziel; Bedeutung für die Praxis	383
	Aufgaben	385
3.2.2	Zahlenfolgen	385
3.2.2.1	Begriff der Zahlenfolge und ihre einfachsten Eigenschaften	385
	Aufgaben	389
3.2.2.2	Grenzwert und Konvergenz	389
	Aufgaben	393
3.2.2.3	Eigenschaften konvergenter Zahlenfolgen und Rechengesetze	393
	Aufgaben	397
3.2.2.4	Anwendungen von Zahlenfolgen	398
	Aufgaben	400
3.2.3	Zahlenreihen	401

3.2.3.1	Grundbegriffe und Beispiele	401
	Aufgaben	403
3.2.3.2	Konvergenzkriterien für Reihen	404
	Aufgaben	406
3.3	Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen	406
3.3.1	Problemstellung und Ziele; praktische Beispiele	407
3.3.2	Grenzwert und Konvergenz	409
	Aufgaben	414
3.3.3	Stetigkeit	414
	Aufgaben	417
3.3.4	Differenzen- und Differentialquotient (Ableitung)	417
3.3.4.1	Grundbegriffe und Differentiationsregeln	417
	Aufgaben	424
3.3.4.2	Differential und Differenzierbarkeit	425
	Aufgaben	427
3.3.4.3	Anwendungen von Differenzen- und Differentialquotient bei Untersuchungen von Wachstum und Zusammenhängen ökonomischer Kennzahlen	428
	Aufgaben	432
3.3.5	Untersuchungen von Funktionen mit Hilfe ihrer Ableitungen	433
3.3.5.1	Stetigkeit und ein Mittelwertsatz	433
3.3.5.2	Konstante bzw. monotone Funktionen	434
	Aufgaben	436
3.3.5.3	Extrema von Funktionen	436
	Aufgaben	441
3.3.5.4	Krümmungsverhalten und Wendepunkte von Funktionen	441
	Aufgaben	445
3.3.6	Anwendungen	445
3.3.6.1	Klassifikation und Vergleich des Wachstums ökonomischer Kennzahlen	446
	Aufgaben	452
3.3.6.2	Verdopplungs- und Überholproblem	453
	Aufgaben	456
3.3.6.3	Zusammenhänge ökonomischer Kennzahlen	456
	Aufgaben	460
3.3.6.4	Kostenfunktionen und minimale Stückkosten	460
	Aufgaben	466
3.3.6.5	Lagerhaltungsprobleme	466
	Aufgaben	469
3.3.6.6	Beweis von Ungleichungen	470
	Aufgaben	471
3.3.7	Taylor-Formel	471
	Aufgaben	473

3.4	Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variablen	473
3.4.1	Beispiele und Problemstellungen	474
3.4.2	Grundbegriffe: Funktion, Niveaulinie und implizite Funktion . .	478
	Aufgaben	481
3.4.3	Einfachste Eigenschaften: Linearität, Separabilität, Konvexität und Homogenität	481
	Aufgaben	485
3.4.4	Grenzwerte und Stetigkeit	485
	Aufgaben	490
3.4.5	Partielle Ableitungen und vollständiges Differential	490
3.4.5.1	Partielle Ableitungen 1. Ordnung	490
	Aufgaben	493
3.4.5.2	Partielle Ableitungen 2. und höherer Ordnung	494
	Aufgaben	496
3.4.5.3	Vollständiges Differential und Gradient	496
	Aufgaben	503
3.4.5.4	Ableitungen impliziter bzw. homogener Funktionen	503
	Aufgaben	508
3.4.5.5	Ökonomische Interpretation partieller Ableitungen	508
	Aufgaben	511
3.4.6	Extremwerttheorie für Funktionen mehrerer Variablen	511
3.4.6.1	Extremwerte ohne Nebenbedingungen	511
	Aufgaben	515
3.4.6.2	Extremwerte mit Gleichungen als Nebenbedingungen	516
	Aufgaben	520
3.4.6.3	Kuhn-Tucker-Bedingungen	521
	Aufgaben	526
3.4.7	Methode der kleinsten Quadrate	526
3.4.7.1	Problemstellung	526
3.4.7.2	Geraden als Trendfunktionen (linearer Trend)	529
	Aufgaben	532
3.4.7.3	Polynome und weitere Typen von Trendfunktionen	533
	Aufgaben	537
3.4.8	Weitere Anwendungen	538
3.4.8.1	Synthese der Untersuchungen von Wachstum und Zusammenhängen ökonomischer Kennzahlen	538
	Aufgaben	540
3.4.8.2	Elastizitäten für homogene Produktionsfunktionen	540
	Aufgaben	542
3.4.8.3	Minimalkostenproblem und partielle Produktionselastizitäten . . .	542
	Aufgaben	544

3.5	Integralrechnung für Funktionen einer reellen Variablen	544
3.5.1	Problemstellung	545
3.5.2	Das unbestimmte Integral	547
3.5.2.1	Definition des unbestimmten Integrals	547
	Aufgaben	550
3.5.2.2	Einfache Integrationsregeln	550
	Aufgaben	553
3.5.2.3	Substitutionsmethode und partielle Integration	553
	Aufgaben	557
3.5.3	Das bestimmte Integral	558
3.5.3.1	Definition des bestimmten Integrals	558
	Aufgaben	561
3.5.3.2	Klassen integrierbarer Funktionen	561
	Aufgaben	564
3.5.3.3	Eigenschaften integrierbarer Funktionen und des bestimmten Integrals	565
	Aufgaben	568
3.5.3.4	Bestimmtes Integral mit variabler oberer Grenze	568
3.5.3.5	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	570
	Aufgaben	572
3.5.3.6	Numerische Integration	572
3.5.4	Uneigentliche Integrale	576
3.5.5	Anwendungen	579
	Aufgaben	582
3.6	Lineare Differential- und Differenzgleichungen	582
3.6.1	Beispiele, Problemstellung und Grundbegriffe	582
3.6.1.1	Ökonomische Aufgaben und mathematische Problemstellungen	582
	Aufgaben	587
3.6.1.2	Begriff der Differentialgleichung und weitere grundlegende Definitionen	587
3.6.1.3	Trennung der Variablen	589
	Aufgaben	591
3.6.2	Lineare Differentialgleichungen	592
3.6.2.1	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	593
	Aufgaben	595
3.6.2.2	Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	595
3.6.2.3	Lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	598
	Aufgaben	602
3.6.2.4	Lineare homogene Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	602

3.6.2.5	Lösung linearer inhomogener Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	603
	Aufgaben	606
3.6.2.6	Stabilität und Gleichgewicht	606
	Aufgaben	609
3.6.3	Lineare Differentialgleichungssysteme	609
3.6.3.1	Einführung	609
3.6.3.2	Lösung linearer homogener Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	611
3.6.3.3	Lösung linearer inhomogener Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	614
3.6.3.4	Eliminationsverfahren	615
	Aufgaben	616
3.6.4	Einführung in die Differenzenrechnung	616
	Aufgaben	621
3.6.5	Begriff der Differenzgleichung	621
3.6.6	Lineare Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten	624
3.6.6.1	Aussagen über lineare Differenzgleichungen und ihre Lösungen	624
3.6.6.2	Lineare Differenzgleichungen 1. Ordnung	628
	Aufgaben	630
3.6.6.3	Lineare homogene Differenzgleichungen 2. Ordnung	631
3.6.6.4	Lineare homogene Differenzgleichungen n -ter Ordnung	634
3.6.6.5	Lineare inhomogene Differenzgleichungen	635
	Aufgaben	637
3.6.7	Lineare homogene Differenzgleichungssysteme 1. Ordnung	638
	Aufgaben	641
3.6.8	Anwendungen von Differential- und Differenzgleichungen in der Ökonomie	642
	Lösungen zu den Aufgaben	645
	Literaturverzeichnisse	719
	Sachwortverzeichnis	725