

Lothar Papula

Übungen zur Mathematik für Ingenieure

**Anwendungsorientierte Übungsaufgaben
aus Naturwissenschaft und Technik
mit ausführlichen Lösungen**

188 Übungsaufgaben mit Lösungen,
313 Bilder und ein Anhang Physikalische Grundlagen

2., verbesserte und erweiterte Auflage



Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden

Inhaltsverzeichnis

I Vektorrechnung

Übung	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Kraftzerlegung am Keil	Zerlegung eines Vektors in Komponenten	1
2	Zusammengesetzte Bewegung einer Fähre	Vektoraddition	2
3	Kräftegleichgewicht an einem belasteten Rollensystem	Vektoraddition	3
4	Zweifach gelagerte Welle bei Belastung	Komponentenrechnung	4
5	Stabkräfte (Reaktionskräfte) in einem Ausleger	Vektoraddition	5
6	Schwerpunkt eines Massenpunktsystems	Vektoraddition	6
7	Überlagerung elektrischer Felder	Vektoraddition	7
8	Kraftwirkung zwischen stromdurchflossenen Leitern	Vektorprodukt	8
9	Stabkräfte (Reaktionskräfte) in einem belasteten Dreibein	Räumliche Vektoraddition, Gaußscher Algorithmus	10
10	Arbeit an einer Punktladung in einem elektrischen Feld	Skalarprodukt	12
11	Durchbiegung eines Balkens bei Belastung durch mehrere Kräfte	Skalarprodukt	13
12	Moment einer Kraft in einem Kugelgelenk	Vektorprodukt, Richtungswinkel	14
13	Umfangsgeschwindigkeit einer rotierenden Zylinderscheibe	Vektorprodukt, Ableitung eines Vektors	15
14	Drehmoment einer stromdurchflossenen Leiterschleife im Magnetfeld	Vektorprodukt	16
15	Kräftefreie Bewegung eines Elektrons in einem elektromagnetischen Feld	Vektorprodukt, Richtungswinkel	17
16	Fachwerk im statischen Gleichgewicht	Vektoraddition, Vektorprodukt, lineares Gleichungssystem	18
17	Koplanare Kraftvektoren	Vektoraddition, Richtungswinkel, Spatprodukt	20
18	Spannungsstoß in einer Leiterschleife durch elektromagnetische Induktion	Vektor- und Spatprodukt	21
19	Bewegung von Ladungsträgern in einem Magnetfeld	Ableitungen eines Vektors, Skalar- und Spatprodukt	22

II Funktionen und Kurven

Übung	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1.	Reihenschaltung aus n gleichen Spannungsquellen	Diskrete Funktion	24
2	Zeitversetzter freier Fall zweier Kugeln	Lineare Funktion	25
3	Zugspannung in einem rotierenden Stab	Quadratische Funktion	26
4	Sortiervorrichtung	Parameterdarstellung, quadratische Funktion	28
5	Aufeinander abrollende Zahnräder (Epizykloide)	Parameterdarstellung einer Kurve	29
6	Fallbeschleunigung in und außerhalb eines Erdkanals	Lineare Funktion, gebrochenrationale Funktion	31
7	Verteilung der Stromdichte in einem stromdurchflossenen Hohlzylinder	Gebrochenrationale Funktion	33
8	Kapazität eines Kondensators mit geschichtetem Dielektrikum	Gebrochenrationale Funktion	34
9	Magnetfeld in der Umgebung einer stromdurchflossenen elektrischen Doppelleitung	Gebrochenrationale Funktion	35
10	Kennlinie einer Glühlampe	Interpolationsformel von Newton, kubische Funktion, Horner-Schema	37
11	Doppelschieber	Parameterdarstellung, Kegelschnittgleichung	39
12	Rollbewegung einer Zylinderwalze längs einer schiefen Ebene	Wurzelfunktion	40
13	Ballistisches Pendel	Zusammengesetzte Funktion	42
14	Sinusförmige Wechselspannung	Allgemeine Sinusfunktion	43
15	Momentane (zeitabhängige) Leistung eines Wechselstroms	Sinus- und Kosinusfunktionen	44
16	Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen gleicher Raumrichtung	Sinus- und Kosinusfunktionen	46
17	Lissajous-Figuren	Parameterdarstellung, Sinus- und Kosinusfunktionen, Wurzelfunktionen	47
18	Schwebungen	Trigonometrische Funktionen	49
19	Fliehkraft- oder Zentrifugalkraftregler	Trigonometrische Funktionen, Arkuskosinusfunktion	51
20	Ladestrom in einer RC-Parallelschaltung	Exponentialfunktion (Abklingfunktion)	52
21	RC-Glied mit Rampenspannung	Exponentialfunktion (Sättigungsfunktion)	54
22	Aperiodischer Grenzfall einer Schwingung	Kriechfunktion (Exponentialfunktion)	55

23	Barometrische Höhenformel	Logarithmusfunktion	56
24	Zusammenhang zwischen Fallgeschwindigkeit und Fallweg	Hyperbelfunktionen	58

III Differentialrechnung

Übung	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Induktionsspannung in einer Leiterschleife	Elementare Differentiation	60
2	Elektronenstrahl-Oszilloskop	Elementare Differentiation, Tangentengleichung	61
3	Querkraft- und Momentenverlauf längs eines belasteten Trägers	Elementare Differentiation	63
4	Rotierende Zylinderscheibe in einer zähen Flüssigkeit	Differentiation (Kettenregel)	64
5	Kurbeltrieb	Differentiation (Kettenregel)	66
6	Zusammenhang zwischen Fallbeschleunigung und Fallweg	Differentiation (Kettenregel)	68
7	Periodische Bewegung eines Massenpunktes	Differentiation eines zeitabhängigen Ortsvektors	69
8	Rollkurve oder gewöhnliche Zykloide	Differentiation eines zeitabhängigen Ortsvektors	70
9	Linearisierung einer Halbleiter-Kennlinie	Linearisierung einer Funktion	73
10	Linearisierung der Widerstandskennlinie eines Thermistors (Heißleiters)	Linearisierung einer Funktion	74
11	Gruppenschaltung von Batterien	Extremwertaufgabe	76
12	Wurfparabel eines Wasserstrahls	Extremwertaufgabe	78
13	Scheibenpendel mit minimaler Schwingungsdauer	Extremwertaufgabe	79
14	Leistungsanpassung eines Verbraucherwiderstandes	Extremwertaufgabe	81
15	Resonanzfall bei einer erzwungenen Schwingung	Extremwertberechnung	82
16	Optimale Beleuchtung eines Punktes durch eine Lichtquelle	Extremwertaufgabe	84
17	Gaußsche Normalverteilung	Extremwerte, Wendepunkte	85
18	Elektrische Feldstärke in der Umgebung einer elektrischen Doppelleitung	Kurvendiskussion	87
19	Ungestörte Überlagerung zeitabhängiger Impulse	Kurvendiskussion	89

20	Überlagerung von Sinusschwingungen gleicher Raumrichtung, aber unterschiedlicher Frequenz	Kurvendiskussion	92
21	Fallgeschwindigkeit mit und ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes	Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital	95
22	Erzwungene Schwingung im Resonanzfall	Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital	97
23	Eintauchtiefe einer Boje in Salzwasser	Tangentenverfahren von Newton	99
24	Freihängendes Seil (Seilkurve, Kettenlinie)	Tangentenverfahren von Newton	101

IV Integralrechnung

Übung	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Seiltrommel mit Lasten	Elementare Integration (Grundintegral)	103
2	Induktionsspannung in einer im Magnetfeld rotierenden Metallscheibe	Elementare Integration (Grundintegral)	104
3	Rollbewegung einer Kugel längs einer schiefen Ebene	Elementare Integrationen (Grundintegrale)	105
4	Oberflächenprofil einer rotierenden Flüssigkeit	Elementare Integration (Grundintegral)	107
5	Resultierende eines ebenen parallelen Kräftesystems	Elementare Integrationen (Grundintegrale)	108
6	Querkraft und Biegemoment längs eines Balkens mit linear ansteigender Last (Dreieckslast)	Elementare Integrationen (Grundintegrale)	109
7	Fliehkraft- oder Zentrifugalkraftregler	Elementare Integration (Grundintegral)	111
8	Massenträgheitsmoment eines Rotationskörpers (elliptischer Querschnitt)	Elementare Integration (Grundintegral)	113
9	Zugstab mit konstanter Zugspannung	Elementare Integrationen (Grundintegrale)	114
10	Magnetischer Fluß durch eine Leiterschleife	Elementare Integrationen (Grundintegrale)	115
11	Kapazität eines Koaxialkabels	Elementare Integration (Grundintegral)	117
12	Übergangswiderstand einer Kugel	Elementare Integration (Grundintegral)	118
13	Arbeit im Gravitationsfeld der Erde	Elementare Integration (Grundintegral)	119
14	Elektrischer Widerstand eines kegelförmigen Kontaktes	Integration mittels Substitution	120
15	Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes	Integration mittels Substitution	121
16	Aufladung eines Kondensators	Integration mittels Substitution	123

17	Rotation einer Scheibe in einer Flüssigkeit	Integration mittels Substitution	125
18	Kapazität einer elektrischen Doppel- leitung	Integration mittels Substitution	126
19	Effektivwert eines Wechselstroms	Integration mittels Substitution	128
20	Bogenlänge einer Epizykloide	Integration mittels Substitution	129
21	Fallgesetze bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes	Integration mittels Substitution	131
22	Mittlere Geschwindigkeit von Gas- molekülen	Partielle Integration	133
23	Durchschnittliche Leistung eines Wechselstroms	Integration mittels Substitution bzw. partieller Integration	135
24	Induktivität einer elektrischen Doppel- leitung	Integration durch Partialbruchzerlegung des Integranden, Integration mittels Substitution	137
25	Schwingungsdauer eines Fadenpendels	Numerische Integration nach Simpson	139

V Taylor- und Fourier-Reihen

Übung	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Fallgeschwindigkeit mit und ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes	Grenzwertbestimmung mittels Reihen- entwicklung	141
2	Elektrischer Widerstand zwischen zwei koaxialen Zylinderelektroden	Potenzreihenentwicklung, Näherungs- polynome	143
3	Temperaturabhängigkeit der Dichte eines Festkörpers	Potenzreihenentwicklung, lineare Näherungsfunktion	144
4	Magnetische Feldstärke in der Mitte einer stromdurchflossenen Zylinderspule	Potenzreihenentwicklung, Näherungs- polynom	146
5	Temperaturabhängigkeit der Schall- geschwindigkeit in Luft	Potenzreihenentwicklung, lineare Näherungsfunktion	147
6	Spiegelgalvanometer	Potenzreihenentwicklung, lineare Näherungsfunktion	149
7	Kapazität einer elektrischen Doppel- leitung	Potenzreihenentwicklung, Näherungs- formel	150
8	Relativistische Masse und Energie eines Elektrons	Potenzreihenentwicklung, Näherungs- polynom	151
9	RC-Schaltung mit Rampenspannung	Potenzreihenentwicklung, Näherungs- funktionen	153
10	Freihängendes Seil (Seilkurve, Kettenlinie)	Lösen einer Gleichung mittels Reihen- entwicklung, Näherungsparabel	154
11	Gaußsche Normalverteilung	Integration durch Potenzreihenent- wicklung des Integranden	156

12	Schwingungsdauer eines Fadenpendels	Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden	158
13	Fourier-Zerlegung einer periodischen Folge rechteckiger Spannungsimpulse	Fourier-Reihe, Amplitudenspektrum	161
14	Fourier-Reihe einer Kippspannung (Sägezahnimpuls)	Fourier-Reihe	163
15	Fourier-Zerlegung eines „angeschnittenen“ Wechselstroms	Fourier-Reihe	165

VI Lineare Algebra

Übung	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Widerstands- und Kettenmatrix eines linearen Vierpols	Orthogonale Matrix	169
2	Vierpolgleichungen für ein symmetrisches T-Glied	Matrizenrechnung, inverse Matrix, orthogonale Matrix	171
3	Symmetrische π -Schaltung	Multiplikation von Matrizen	174
4	Kettenschaltung von Vierpolen	Multiplikation von Matrizen	175
5	Durchbiegung eines Trägers bei Belastung durch mehrere Kräfte	Multiplikation von Matrizen (Falk-Schema)	176
6	Eigenkreisfrequenzen einer Biegeschwingung	Determinantengleichung	177
7	Elektromagnetische Induktion in einem durch ein Magnetfeld bewegten elektrischen Leiter	Dreireihige Determinante	179
8	Kritische Drehzahlen einer zweifach gelagerten Welle	Homogenes lineares Gleichungssystem, Determinantengleichung	180
9	Widerstandsmessung mit der Wheatstoneschen Brücke	Homogenes lineares Gleichungssystem, Determinanten	183
10	Torsionsschwingung einer Welle	Dreireihige Determinante	184
11	Verzweigter Stromkreis	Inhomogenes lineares Gleichungssystem, Cramersche Regel	185
12	Beschleunigte Massen in einem Rollensystem	Inhomogenes lineares Gleichungssystem, Cramersche Regel	187
13	Berechnung der Zweigströme in einem elektrischen Netzwerk	Inhomogenes lineares Gleichungssystem, Cramersche Regel	189
14	Netzwerkanalyse nach dem Maschenstromverfahren	Inhomogenes lineares Gleichungssystem, Gaußscher Algorithmus	190
15	Berechnung der Zweigströme in einem elektrischen Netzwerk	Inhomogenes lineares Gleichungssystem, Gaußscher Algorithmus (Matrizenform)	192

16	Berechnung der Ströme in einer Netz- maschine	Inhomogenes lineares Gleichungssystem, Gaußscher Algorithmus	194
17	Modifizierter Gerber-Träger	Inhomogenes lineares Gleichungssystem, Gaußscher Algorithmus	196

VII Komplexe Zahlen und Funktionen

Übung	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Resonanz im Parallelschwingkreis	Komplexe Rechnung	199
2	Ohmscher Spannungsteiler	Komplexe Rechnung	201
3	Berechnung des Scheinwiderstandes eines Netzwerkes	Komplexe Rechnung	202
4	Wechselstrommeßbrücke	Komplexe Rechnung	204
5	Wechselstromparadoxon	Komplexe Rechnung	206
6	Komplexer Wechselstromkreis	Komplexe Rechnung	208
7	Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen gleicher Raumrichtung	Komplexe Zeiger	210
8	Leitwertortskurve einer RC-Parallel- schaltung	Ortskurve einer parameterabhängigen komplexen Größe	213
9	Widerstands- und Leitwertortskurve einer RL-Reihenschaltung	Ortskurven parameterabhängiger komplexer Größen	214

VIII Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

Übung	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Potential und elektrische Feldstärke im elektrostatischen Feld zweier Punkt- ladungen	Partielle Ableitungen 1. Ordnung	216
2	Statisch unbestimmt gelagerter Balken	Partielle Ableitungen	218
3	Kapazität einer Kondensatorschaltung	Totales oder vollständiges Differential	220
4	Schwingungsgleichung der Mechanik	Totales oder vollständiges Differential	222
5	Selbstinduktivität einer elektrischen Doppelleitung	Linearisierung einer Funktion	223
6	Leistungsanpassung beim Wechselstrom- generator	Extremwertaufgabe	225

7	Eine Anwendung des Gaußschen Fehlerintegrals	Extremwertaufgabe	228
8	Flächeninhalt und Flächenschwerpunkt eines Kreisabschnittes (Kreissegmentes)	Doppelintegrale in kartesischen Koordinaten	232
9	Magnetischer Fluß durch eine Leiterschleife	Doppelintegral in Polarkoordinaten	234
10	Stromstärke in einem Leiter bei ortsabhängiger Stromdichte	Doppelintegral in Polarkoordinaten	236
11	Normierung der Gaußschen Normalverteilungsdichtefunktion	Doppelintegral in Polarkoordinaten	237
12	Schwerpunkt, Hauptachsen und Hauptflächenmomente 2. Grades (Hauptflächenträgheitsmomente) einer trapezförmigen Fläche	Doppelintegrale in kartesischen Koordinaten	241
13	Volumen und Schwerpunkt eines Tetraeders	Dreifachintegrale in kartesischen Koordinaten	245
14	Massenträgheitsmoment eines Speichenrades	Dreifachintegral in Zylinderkoordinaten	247
15	Schwerpunkt eines rotations-symmetrischen Körpers mit elliptischem Querschnitt und zylindrischer Bohrung	Dreifachintegrale in Zylinderkoordinaten	249
16	Massenträgheitsmomente eines homogenen Kegels	Dreifachintegrale in Zylinderkoordinaten	251
17	Magnetische Feldstärke in der Umgebung eines stromdurchflossenen linearen Leiters	Linienintegrale	256
18	Magnetische Feldstärke in der Achse eines stromdurchflossenen kreisförmigen Leiters	Linienintegral	258
19	Elektrisches Feld einer Linienquelle	Partielle Ableitungen, konservatives Vektorfeld, Linienintegral	260

IX Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übung	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Raketengleichung	Dgl 1. Ordnung vom Typ $y' = f(x)$ (Integration mittels Substitution)	264
2	RL-Schaltkreis mit einer Gleichstromquelle	Homogene lineare Dgl 1. Ordnung (Trennung der Variablen)	268
3	Seilkräfte und Seilreibung	Homogene lineare Dgl 1. Ordnung (Trennung der Variablen)	270
4	Fallbewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit	Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung (Variation der Konstanten)	271

5	RC-Schaltkreis mit einer Gleichspannungsquelle	Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung (Variation der Konstanten)	274
6	RC-Wechselstromkreis	Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung (Aufsuchen einer partikulären Lösung)	276
7	Biegelinie eines beidseitig eingespannten Balkens bei konstanter Streckenlast	Dgl 2. Ordnung vom Typ $y'' = f(x)$ (direkte Integration)	280
8	Knicklast nach Euler	Homogene lineare Dgl 2. Ordnung (Schwingungsgleichung)	282
9	Radialbewegung einer Masse in einer geraden, rotierenden Führung	Homogene lineare Dgl 2. Ordnung	284
10	Elektromagnetischer Schwingkreis	Homogene lineare Dgl 2. Ordnung (Schwingungsgleichung)	285
11	Biegeschwingung einer elastischen Blattfeder.	Homogene lineare Dgl 2. Ordnung (Schwingungsgleichung)	287
12	Scheibenpendel (physikalisches Pendel)	Homogene lineare Dgl 2. Ordnung (Schwingungsgleichung)	289
13	Vertikale Schwingungen eines Körpers in einer Flüssigkeit	Homogene lineare Dgl 2. Ordnung (gedämpfte Schwingung)	291
14	Schwingung eines rotierenden Federpendels	Inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung (Schwingungsgleichung, Aufsuchen einer partikulären Lösung)	293
15	Drehspulinstrument	Inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung (aperiodische Schwingung, Aufsuchen einer partikulären Lösung)	295
16	Erzwungene mechanische Schwingung	Inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung (erzwungene Schwingung, Aufsuchen einer partikulären Lösung)	299
17	Gleichung einer Seilkurve (Kettenlinie)	Nichtlineare Dgl 2. Ordnung (Substitutionsmethode, Trennung der Variablen)	301
18	Torsionsschwingungen einer zweifach besetzten elastischen Welle	System linearer Dgln 2. Ordnung	303
19	Elektronenbahn im homogenen Magnetfeld	System linearer Dgln 2. Ordnung	305

X Fehler- und Ausgleichsrechnung

Übung	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Widerstandsmoment eines kreisringförmigen Rohrquerschnittes gegen Torsion (Verdrehung)	Absoluter und prozentualer Maximalfehler	308

2	Kombinierte Parallel-Reihenschaltung elastischer Federn	Absoluter und prozentualer Maximalfehler	309
3	Selbstinduktivität einer elektrischen Doppelleitung	Fehlerfortpflanzung nach Gauß	311
4	Wirkleistung eines Wechselstroms	Absoluter Maximalfehler	312
5	Widerstandsmessung mit der Wheatstoneschen Brücke	Mittelwert und mittlerer Fehler des Mittelwertes, Fehlerfortpflanzung nach Gauß	314
6	Massenträgheitsmoment eines dünnen Stabes	Auswertung von Meßreihen, Fehlerfortpflanzung nach Gauß	316
7	Widerstandskennlinie eines Thermistors (Heißleiters)	Ausgleichskurve (Exponentialfunktion)	318
8	Kennlinie eines nichtlinearen Widerstandes (Glühlampe)	Ausgleichskurve (kubische Funktion)	320

XI Laplace-Transformation

Übung	Naturwissenschaftlich-technisches Problem	Mathematisches Stoffgebiet	Seite
1	Ausschaltvorgang in einem RL-Schaltkreis	Homogene lineare Dgl 1. Ordnung	323
2	RC-Wechselstromkreis	Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung (Faltungssatz)	325
3	RL-Schaltkreis mit Rampenspannung	Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung	328
4	RC-Schaltkreis mit einem rechteckigen Spannungsimpuls	Inhomogene lineare Dgl 1. Ordnung (1. Verschiebungssatz)	329
5	Erzwungene mechanische Schwingung im Resonanzfall	Inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung	333
6	Erzwungene Schwingung eines mechanischen Systems	Inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung	334
7	Elektromagnetischer Reihenschwingkreis	Integro-Differentialgleichung (Ableitungs- und Integralsatz für Originalfunktionen)	337
8	Spannungsübertragung bei einem Vierpol	System linearer Dgln 1. Ordnung (Partialbruchzerlegung der Bildfunktion)	339
9	Gekoppelte mechanische Schwingungen	System linearer Dgln 2. Ordnung	344

Anhang: Physikalische Grundlagen