

# Lehr- und Übungsbuch **MATHEMATIK**

**Band I**

**Mengen - Zahlen - Funktionen - Gleichungen**

Mit 215 Bildern, 362 Beispielen und 685 Aufgaben mit Lösungen



**Fachbuchverlag Leipzig - Köln**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Logik und Mengenlehre</b>	<b>11</b>
1.1	Aussagen- und Prädikatenlogik	11
1.1.1	Aussagen und Aussagenverknüpfungen	11
1.1.2	Wahrheitsfunktionen	13
	Aufgaben 1.1 bis 1.2	17
	Aufgaben 1.3 bis 1.4	18
	Aufgaben 1.5 bis 1.6	20
1.1.3	Die Folgebeziehung und ihr Nachweis	20
	Aufgabe 1.7	22
	Aufgaben 1.8 bis 1.10	24
1.1.4	Aussageformen und Quantoren	25
1.2	Grundbegriffe der Mengenlehre	26
1.2.1	Der Begriff der Menge	26
	Aufgabe 1.11	30
1.2.2	Beziehungen zwischen Mengen (Mengenrelationen)	30
	Aufgabe 1.12	33
1.2.3	Mengenoperationen	33
	Aufgaben 1.13 bis 1.16	36
	Aufgaben 1.17 bis 1.21	38
	Aufgaben 1.11 bis 1.23	41
<b>2</b>	<b>Aufbau der reellen Zahlen</b>	<b>42</b>
2.1	Natürliche und ganze Zahlen	42
2.1.1	Addition natürlicher Zahlen	43
	Aufgabe 2.1	44
2.1.2	Subtraktion. Die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung	44
	Aufgaben 2.2 bis 2.6	47
2.1.3	Multiplikation. Rechnen mit Klammerausdrücken. Binome	47
	Aufgabe 2.7	49
	Aufgaben 2.8 bis 2.9	51
	Aufgaben 2.10 bis 2.18	53
2.2	Rationale Zahlen	54
2.2.1	Division. Eine zweite Zahlbereichserweiterung	54
2.2.2	Rechenvorschriften für die Division	57
	Aufgaben 2.19 bis 2.20	57
	Aufgabe 2.21	58
	Aufgabe 2.22 bis 2.24	60
2.2.3	Rechnen mit Brüchen	61
	Aufgaben 2.25 bis 2.31	66
2.3	Reelle Zahlen	69
2.3.1	Potenzen, Binomische Formeln	69
	Aufgaben 2.32 bis 2.35	71

## Inhaltsverzeichnis

	Aufgabe 2.36.....	72
	Aufgabe 2.37.....	73
2.3.2	Ganzzahlige Potenzen.....	73
	Aufgaben 2.38 bis 2.42.....	77
	Aufgaben 2.43 bis 2.44.....	78
2.3.3	Wurzeln. Dritte Zahlbereichserweiterung.....	79
2.3.4	Reelle Zahlen. Darstellungsweisen.....	82
2.3.5	Potenzen mit gebrochenem Exponenten.....	83
	Aufgaben 2.45 bis 2.46.....	85
	Aufgaben 2.47 bis 2.52.....	86
	Aufgaben 2.53 bis 2.56.....	89
	Aufgaben 2.57 bis 2.59.....	91
	Aufgabe 2.60.....	92
	Aufgaben 2.61 bis 2.64.....	94
2.3.6	Logarithmen.....	95
	Aufgaben 2.65 bis 2.66.....	97
	Aufgaben 2.67 bis 2.69.....	100
2.4	Gleichungen und Ungleichungen.....	101
2.4.1	Gleichungen.....	101
2.4.2	Ungleichungen.....	105
<b>3</b>	<b>Komplexe Zahlen.....</b>	<b>107</b>
3.1	Grundbegriffe.....	107
3.1.1	Imaginäre Einheit und imaginäre Zahlen.....	107
	Aufgaben 3.1 bis 3.2.....	110
3.1.2	Der Begriff der komplexen Zahl.....	111
3.1.3	Die Gaußsche Zahlenebene.....	112
3.2	Grundrechenarten für komplexe Zahlen.....	113
3.2.1	Addition und Subtraktion komplexer Zahlen.....	113
3.2.2	Multiplikation komplexer Zahlen.....	116
3.2.3	Division komplexer Zahlen.....	116
	Aufgaben 3.3 bis 3.7.....	118
3.3	Goniometrische Darstellung komplexer Zahlen (Darstellung in Polarkoordinaten).....	119
3.3.1	Grundbegriffe und Umrechnung in die goniometrische Darstellung.....	119
	Aufgaben 3.8 bis 3.9.....	122
3.3.2	Multiplikation und Division bei goniometrischer Darstellung.....	122
	Aufgaben 3.10 bis 3.14.....	125
3.3.3	Potenzieren und Radizieren komplexer Zahlen (Satz von Moivre).....	126
	Aufgaben 3.15 bis 3.16.....	127
	Aufgabe 3.17.....	130
3.4	Die Exponentialform komplexer Zahlen.....	130
3.4.1	Die Eulersche Gleichung und die Exponentialform.....	130
3.4.2	Rechnen mit komplexen Zahlen in Exponentialform.....	133

## Inhaltsverzeichnis

3.4.3	Umwandlung komplexer Zahlen aus der und in die Exponentialform	134
	Aufgaben 3.18 bis 3.21	136
3.5	Anwendungen. Die Exponentialform in der Elektrotechnik	136
<b>4</b>	<b>Funktionen und Gleichungen</b>	<b>139</b>
4.1	Funktionen	139
4.1.1	Funktionsbegriff und Darstellung von Funktionen	142
	Aufgaben 4.1 bis 4.26	159
4.1.2	Eigenschaften von Funktionen	161
4.1.3	Umkehrfunktion	166
	Aufgaben 4.27 bis 4.28	171
4.1.4	Rationale Funktionen	172
4.1.4.1	Lineare Funktionen	172
	Aufgaben 4.29 bis 4.38	176
4.1.4.2	Quadratische Funktionen	177
	Aufgaben 4.39 bis 4.46	183
4.1.4.3	Ganze rationale Funktionen	183
	Aufgaben 4.47 bis 4.54	186
	Aufgaben 4.55 bis 4.59	188
4.1.4.4	Gebrochenrationale Funktionen	189
	Aufgaben 4.60 bis 4.61	194
4.1.5	Potenz- und Wurzelfunktionen	194
4.1.5.1	Potenzfunktionen	194
4.1.5.2	Wurzelfunktionen	197
	Aufgaben 4.62 bis 4.64	199
4.2	Gleichungen	200
4.2.1	Gleichungen 1. Grades	200
	Aufgaben 4.65 bis 4.172	216
4.2.2	Proportionen	224
	Aufgaben 4.173 bis 4.191	230
4.2.3	Gleichungen 2. Grades	233
	Aufgaben 4.192 bis 4.270	245
4.2.4	Algebraische Gleichungen höheren Grades	249
	Aufgaben 4.271 bis 4.304	263
4.2.5	Wurzelgleichungen	264
	Aufgaben 4.305 bis 4.382	269
4.2.6	Exponentialgleichungen	271
	Aufgaben 4.383 bis 4.433	274
4.2.7	Logarithmische Gleichungen	276
	Aufgaben 4.434 bis 4.444	278
4.2.8	Exponentialfunktionen	278
	Aufgaben 4.445 bis 4.448	281
4.2.9	Logarithmische Funktionen	282
	Aufgaben 4.449 bis 4.453	284

## Inhaltsverzeichnis

<b>5</b>	<b>Trigonometrie</b> .....	285
5.1	Definition der trigonometrischen Funktionen.....	285
5.1.1	Winkeleinheiten und Maßzahlen.....	285
	Aufgaben 5.1 bis 5.6.....	288
5.1.2	Definition der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis.....	288
5.1.3	Periodizität der trigonometrischen Funktionen.....	290
5.1.4	Die trigonometrischen Funktionen mit Argumenten in Gradmaßen.....	292
5.1.5	Die trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck.....	293
5.1.6	Veranschaulichung des Kurvenverlaufs.....	295
5.1.7	Vorzeichen der Werte von trigonometrischen Funktionen.....	298
5.2	Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen.....	300
5.2.1	Zusammenhang zwischen den Funktionswerten desselben Winkels.....	300
	Aufgaben 5.7 bis 5.12.....	302
5.2.2	Funktionswerte für besondere Winkel.....	302
5.2.3	Beziehungen trigonometrischer Funktionen für Winkel, die sich zu ganzen Vielfachen von $90^\circ$ (-) ergänzen.....	304
5.2.4	Beziehungen für Winkel, die sich um ganze Vielfache von $90^\circ$ — unterscheiden.....	305
	Aufgabe 5.13.....	307
5.3	Additionstheoreme und andere goniometrische Formeln.....	307
5.3.1	Additionstheoreme.....	307
5.3.2	Trigonometrische Funktionen von Vielfachen eines Winkels.....	312
5.3.3	Funktionen des halben Winkels, Viertelwinkels, Achtelwinkels.....	316
5.3.4	Summen und Differenzen trigonometrischer Funktionen.....	317
	Aufgaben 5.14 bis 5.17.....	319
5.3.5	Potenzen trigonometrischer Funktionen.....	320
	Aufgabe 5.18.....	321
5.4	Zyklometrische Funktionen.....	321
	Aufgaben 5.19 bis 5.20.....	325
5.5	Goniometrische Gleichungen.....	325
5.5.1	Lineare goniometrische Gleichungen.....	325
5.5.2	Quadratische goniometrische Gleichungen mit derselben Winkelfunktion.....	326
5.5.3	Lineare goniometrische Gleichungen mit zwei Summanden einer trigonometrischen Funktion.....	328
5.5.4	Gleichungen mit verschiedenen Winkelfunktionen gleicher Argumente....	330
5.5.5	Gleichungen mit verschiedenen Funktionen und verschiedenen Argumenten.....	332
5.5.6	Goniometrische Gleichungen mit zwei Unbekannten.....	333
5.5.7	Graphische Lösung goniometrischer Gleichungen.....	335
	Aufgaben 5.21 bis 5.24.....	337

10	Inhaltsverzeichnis	
5.6	Berechnungen des rechtwinkligen Dreiecks.....	337
	Aufgaben 5.25 bis 5.39.....	340
5.7	Berechnungen des schiefwinkligen Dreiecks.....	343
5.7.1	Der Sinussatz.....	343
5.7.2	Der Cosinussatz.....	344
5.7.3	Grundaufgaben, die mit dem Sinus- oder dem Cosinussatz gelöst werden.	345
5.7.4	Halbwinkelsätze.....	348
5.7.5	Umkreis- und Inkreisradius eines Dreiecks, Heronische Formel.....	348
5.7.6	Anwendungen.....	350
	Aufgaben 5.40 bis 5.68.....	352
5.8	Näherungsformeln für trigonometrische Funktionen.....	360
<b>6</b>	<b>Grenzwerte und Stetigkeit.....</b>	<b>364</b>
6.1	Arithmetische und geometrische Folgen und Reihen.....	364
6.1.1	Zahlenfolgen, arithmetische Folge.....	364
	Aufgaben 6.1 bis 6.9.....	369
6.1.2	Geometrische Folgen.....	370
	Aufgaben 6.10 bis 6.14.....	375
6.1.3	Zahlenreihen, die geometrische Reihe.....	376
	Aufgaben 6.15 bis 6.18.....	378
6.1.4	Anwendungen der geometrischen Folgen und Reihen.....	379
	Aufgaben 6.19 bis 6.22.....	383
	Aufgaben 6.23 bis 6.28.....	388
6.1.5	Verzinsung in momentanen Zeiträumen und die Zahl $e$ .....	389
6.1.6	Der binomische Lehrsatz und die binomische Reihe.....	391
	Aufgaben 6.29 bis 6.34.....	396
	Aufgaben 6.35 bis 6.37.....	399
6.2	Der Grenzwert einer Zahlenfolge.....	400
6.3	Grenzwerte von Funktionen.....	405
6.3.1	Der Grenzwert einer Funktion der Stelle $x = a$ .....	405
6.3.2	Die Stetigkeit einer Funktion.....	415
6.3.3	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow \pm \infty$ .....	419
6.4	Anwendungsaufgaben (Aufgaben 6.38 bis 6.51).....	419
	Lösungen.....	422
	Sachwortverzeichnis.....	467