

Gerhard Opfer



dandelion.com

© 2008 AGI-Information Management Consultants  
May be used for personal purposes only or by  
libraries associated to [dandelion.com](http://dandelion.com)

# Numerische Mathematik für Anfänger

2., verbesserte Auflage

perforivneato@ bartoerboordtwah  
- bndtoakldkljgnoa,ioahf -

Mit 26 zum Teil farbigen Abbildungen,  
zahlreichen Beispielen und Programmen



vieweg

# Inhalt

Vorwort . . . . .	v
Inhaltsverzeichnis . . . . .	vii
Liste der Beispiele . . . . .	xi
Liste der Tabellen . . . . .	xiii
Liste der Figuren . . . . .	xv
Liste der Programme . . . . .	xvi
<b>1 Zahldarstellung und Rundungsfehler</b>	<b>1</b>
1.1 Maschinenzahlen . . . . .	1
1.1.1 Relativer und absoluter Fehler . . . . .	1
1.1.2 Gleitpunktdarstellung . . . . .	2
1.2 Fehler beim Rechnen . . . . .	5
1.3 Aufgaben . . . . .	8
<b>2 Auswertung elementarer Funktionen</b>	<b>12</b>
2.1 Gewöhnliche Polynome . . . . .	12
2.2 Trigonometrische Polynome . . . . .	17
2.3 Rationale Funktionen . . . . .	25
2.4 Aufgaben . . . . .	31
<b>3 Interpolation</b>	<b>34</b>
3.1 Polynom-Interpolation . . . . .	34
3.1.1 Hermite-Interpolation . . . . .	48
3.2 Spline-Interpolation . . . . .	53
3.2.1 Lineare Splines . . . . .	56
3.2.2 Quadratische Splines . . . . .	59
3.2.3 Kubische Splines . . . . .	60
3.3 Trigonometrische Interpolation . . . . .	61

3.4	Interpolation in linearen Räumen	66
3.5	Rationale Interpolation	70
3.6	Aufgaben	76
<b>Numerische Integration</b>		<b>83</b>
4.1	Interpolatorische Formeln	84
4.2	Zusammengesetzte Formeln	90
4.3	Konvergenzuntersuchungen	91
4.4	Extrapolation und Adaption	93
4.5	Gauß-Quadratur	97
4.6	Integration singulärer Funktionen	108
4.6.1	Regularisierung	109
4.6.2	Anwendung der Gauß-Quadratur	111
4.7	Aufgaben	112
<b>Lineare Gleichungssysteme</b>		<b>116</b>
5.1	Aufgabenstellung	116
5.1.1	Matrizen	118
5.2	Das Gaußsche Eliminationsverfahren	123
5.2.1	Pivotsuche	127
5.2.2	Gauß-Variationen, Cholesky-Zerlegung	132
5.2.3	Mehrere rechte Seiten	136
5.3	Iterative Lösungsverfahren	138
5.4	Methode der konjugierten Gradienten	143
5.5	Aufgaben	152
<b>Lineare Optimierung</b>		<b>158</b>
6.1	Aufgabenstellung	158
6.2	Basisvektoren	162
6.3	Das Simplexverfahren	163
6.4	Praktische Durchführung	168
6.5	Modifikationstechniken	173
6.6	Aufgaben	177

<b>7 Ausgleichs- und Approximationsprobleme</b>	<b>182</b>
7.1 Normen von Vektoren und linearen Abbildungen	182
7.2 Lineare Approximation	190
7.3 Überbestimmte Gleichungssysteme	196
7.3.1 Ausgleichung im quadratischen Mittel	197
7.3.2 Ausgleichung in der Summen- und Maximumnorm	210
7.4 Approximation von Funktionen	211
7.4.1 Tschebyscheff-Approximation	211
7.4.2 Approximation von Funktionen in der $L_2$ -Norm	217
7.5 Aufgaben	220
<b>8 Matrixeigenwerte und -eigenvektoren</b>	<b>223</b>
8.1 Aufgabenstellung und elementare Eigenschaften	223
8.2 Das von-Mises-Verfahren (Potenzmethode)	232
8.3 Die inverse von-Mises-Iteration	233
8.4 Der QR-Algorithmus	234
8.5 Der Lanczos-Algorithmus	236
8.6 Beispiele	238
8.6.1 Von-Mises-Verfahren	240
8.6.2 Inverses von-Mises-Verfahren	240
8.6.3 QR-Verfahren	241
8.6.4 Lanczos-Algorithmus	242
8.7 Aufgaben	243
<b>9 Nichtlineare Gleichungen und Systeme</b>	<b>245</b>
9.1 Aufgabenstellung	245
9.2 Hilfsmittel aus der Analysis	247
9.3 Fixpunktiterationen	249
9.4 Newton-Iterationen	255
9.4.1 Konvergenz für lineare Probleme	260
9.5 Eindimensionale Probleme	263
9.5.1 Nullstellen von Polynomen	263
9.5.2 Nullstellen von beliebigen reellen Funktionen	266
9.5.3 Verfahren ohne Benutzung von Ableitungen	268
9.6 Anhang: Einzugsbereiche des Newton-Verfahrens	269
9.7 Aufgaben	273

Anhang: Alphabete	277
Literaturverzeichnis	278
Schwortverzeichnis	282

Hinweis: Die Beispiele, Tabellen, ..., Sätze, Definitionen etc. sind in jedem Kapitel einheitlich durchnummeriert, mit vorangestellter Kapitelnummer. Dasselbe gilt für die Formelnummern, für die nach gleichem Muster eine separate Durchnummerierung existiert. Die (Unter-) Abschnittsnummern werden also nicht in das Nummerierungssystem übernommen.

## Liste der Beispiele

1.4 Maschinendarstellung von Dualzahlen	4
2.6 Auswertung eines Polynoms mit Horner-Schema	14
2.9 Horner-Schema zur Umrechnung in andere Zahldarstellungen	15
2.11 Vorkommen von Polynomen	16
2.15 Schnelle Fouriertransformation für $N = 4$	22
2.19 Division von Polynomen	25
2.20 Wiederholte Division von Polynomen	26
3.6 Einfache Interpolationspolynome	36
3.14 Inverse Interpolation mit Hilfe des Neville-Schemas	41
3.15 Bestimmung eines Interpolationspolynoms durch vier Punkte mit verschiedenen Methoden	41
3.28 Hermite-Interpolation mit Doppelknoten	50
3.31 Vorgabe der Ableitungen bis zur Ordnung $k$ , bzw. $k - 1$ an den beiden Randpunkten eines Intervalls $[a, b]$	52
3.32 Vorgabe der Ableitungen bis zur Ordnung $k$ an beiden Randpunkten eines Intervalls $[a, b]$	53
3.33 Interpolationsfehler	54
3.35 Interpolation durch einen linearen Spline	56
3.43 Trigonometrische Interpolation der Wurzel	66
3.44 Unlösbarkeit von Interpolationsproblemen	66
3.49 Interpolation durch rationale Funktionen	70
3.56 Pole bei der rationalen Interpolation	75

3.57	Vergleich rationaler mit polynomialer Interpolation	76
4.2	Integrationsformeln für einen bis vier Knoten	85
4.6	Ordnung der Rechtecksregel	87
4.7	Ordnung der Simpson-Regel	87
4.12	Abschätzung des Quadraturfehlers	89
4.26	Gauß-Tschebyscheff-Formeln	104
4.27	Gauß-Quadraturformel der Ordnung Vier	107
4.28	Dreitermrekursion für stückweise lineares Gewicht	107
4.30	Integration einer singulären Funktion	109
4.32	Integration einer singulären Funktion mit Gauß-Quadratur	111
5.1	Produktionsmodell von Leontief	116
5.5	Lösung eines linearen Gleichungssystems	130
5.7	Kleines Residuum und großer Fehler	131
5.10	Verschiedene Dreieckszerlegungen	135
5.13	$\text{diag } A, A_L, A_R$ für $n = 2$	140
5.15	Anwendung des GSV und ESV	142
5.25	Vandermondematrix	150
5.26	Modellproblem	151
6.1	Ernährungsplan	158
6.2	Umwandlung von Nebenbedingungen	161
6.13	Lösung eines linearen Optimierungsproblems	171
7.3	Normen in endlich-dimensionalen Räumen	183
7.4	Normen in Funktionenräumen	184
7.12	Matrix-Normen	188
7.13	Kondition einer $2 \times 2$ -Matrix	189
7.15	Tschebyscheff-Approximation	190
7.16	Approximation in $L_1$	190
7.17	Periodische Schwingungen	191
7.19	Nichtexistenz von besten Approximationen	192
7.21	Mehrere beste Approximationen	192
7.22	Datenapproximation	192

7.26	$L_2$ als Vektorraum mit Skalarprodukt	195
7.30	Approximation durch eine Gerade	197
7.38	Lineare Regression	201
7.49	Householder-Verfahren	208
7.51	Berechnung der Quadratwurzel	211
7.56	Approximation der Monome $t^n$	218
8.1	Eulerscher Knickstab	223
8.2	Schwingende Saite	223
8.6	Dimension von Eigenräumen	227
8.8	Eigenwerte einer Diagonalmatrix	227
9.8	Konvergenzgeschwindigkeit	249
9.9	Eintauchtiefe eines Holzstammes	249
9.11	Fixpunktiteration mit zwei Variablen	250
9.14	Fixpunktiteration für $f(x) = x^2$	251
9.18	Kontraktionssatz für eine Dimension	253
9.19	Kontraktionssatz für zwei Dimensionen	254
9.23	Allgemeines zweidimensionales Newton-Verfahren	257
9.24	Nullstellen der komplexen Funktion $g(z) = e^z - z$	257
9.32	Nullstellen komplexer Polynome	264
9.34	Untere Schranken für Polynomnullstellen	265
9.36	Obere Schranken für Polynomnullstellen	266
9.37	Zyklen im Newton-Verfahren	266

## Liste der Tabellen

1.1	Gleitpunktdarstellung verschiedener Dezimalzahlen	3
1.2	Maschinenzahlen mit zweistelliger Mantisse	3
1.5	Relative Fehler von dreistelligen Dualzahlen	5
2.7	Horner-Schema für $p_3(2)$ aus Beispiel 2.6	15
2.10	Umrechnung der Dezimalzahl 389 in eine Dualzahl	16
2.12	Gewinne aus Maschinenkauf	16
2.13	Verzinsung nach Maschinenkauf	17

2.14	Schnelle Fouriertransformation für $N = 8$	21
2.16	Daten des Fourierpolynoms	23
2.17	Schnelle Auswertung eines Fourierpolynoms	23
2.23	Ergebnisse aus obigem Kettenbruchprogramm	30
3.9	Schema der dividierten Differenzen	39
3.10	Neville-Schema	39
3.11	Aitken-Schema	39
3.16	Neville-Schema zur inversen Interpolation	41
3.17	Dividierte Differenzen für $(0, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 2)$	42
3.18	Neville-Formel	42
3.19	Aitken-Formel	42
3.30	Hermite-Interpolation der Daten (3.34)	51
3.36	Dividierte Differenzen für quadratische Splines	59
3.37	Dividierte Differenzen für kubische Splines	60
3.41	Trigonometrische Interpolation der Wurzel für $N = 16$	65
3.48	Beispiele von Haarschen Räumen	69
4.18	Ergebnisse adaptives Simpson mit berechneten Knoten	97
4.24	Orthogonale Polynome für verschiedene Gewichte $\gamma$	102
4.29	Orthogonale Polynome $q$ , Knoten $x$ , Gewichte $w$ bei Gewichtsfunktion (4.49)	108
4.31	Berechnung von $I(f) = \int_0^1 \cos x x^{-0.5} dx$ mit der Trapezregel ohne und mit Abziehen der Singularität und mit Gauß-Integration	110
5.2	Übersicht über Matrix-Notationen	122
5.11	Operationszahlen bei der Gauß-Elimination	137
5.16	GSV und ESV für Beispiel 5.15 mit $\epsilon^k = \max_{i=1,2,3}  x_i^{k-1} - x_i^k $	143
5.27	Operationszahlen für das Gaußsche Eliminationsverfahren bei kleinen $n$	156
7.8	Vektor- und zugehörige Operatornorm	186
8.5	Lösungen der diskretisierten Eigenwertaufgabe (*)	226
8.21	von-Mises-Iteration	240
8.22	Inverse von-Mises-Iteration	240



9.10	Werte $\alpha_{k+1} = \sin \alpha_k + 1.32\pi$ . . . . .	250
9.13	Fixpunktiteration für $z = \log z$ und experimentelle Konvergenzordnung $q_k$ . . . . .	251
9.25	Newton-Verfahren für $g(z) = e^z - z = 0$ . . . . .	258
9.45	Beispiele zur Nullstellenbestimmung . . . . .	274

## Liste der Figuren

3.13	Zur inversen Interpolation, Beispiel 3.14 . . . . .	40
3.23	Knotenpolynom $\omega$ aus (3.18) für $n = 12$ mit äquidistanten und Tschebyscheffknoten (gestrichelt) . . . . .	45
3.27	Straßenlaterne mit parabelförmigem Bogen . . . . .	49
3.42	Trigonometrische Interpolation der Wurzel, Fehler rechts . . . . .	65
3.58	Fehler der polynomialen und rationalen Interpolation von $\tan$ in $[0, 1.5]$ mit 5 äquidistanten Punkten . . . . .	76
4.1	Integration über ein Intervall $[a, b]$ und über einen zweidimensionalen Bereich $R$ . . . . .	83
4.16	$\bar{I}_{h/2}$ als extrapoliertes Wert aus $I_h$ und $I_{h/2}$ . . . . .	94
7.18	Verschiedene Schwingungsformen . . . . .	191
7.20	Verschiedene beste Approximationen der Rechtecksschwingung . . . . .	192
7.28	Projektion $\hat{v}$ von $f$ auf $V$ . . . . .	196
7.31	Auslenkung einer Spiralfeder und durchhängende Kette . . . . .	198
7.32	Fallstrecke $s$ in Abhängigkeit von der Fallzeit $t$ . . . . .	198
7.54	Alte Knoten $t_j$ ( $\times$ ) und neue Knoten $t'_j$ ( $\circ$ ) beim Remez-Algorithmus am Beispiel von $f(x) = \exp(-x^2)$ und $V = \Pi_5$ . . . . .	216
8.3	Saitenschwingung und Knickstab (gestrichelt) für $j = 1, 2, 3, 4$ . . . . .	225
8.23	Größe und kleinste Ritz-Werte bei äquidistanten und zwei gehäuften Eigenwerten . . . . .	243
9.1	Schnittpunkte von $f(x) = \tan(x)$ und $g(x) = -(x - \pi/2)^2 + 3$ . . . . .	246
9.22	Newton-Verfahren und Linearisierung . . . . .	257
9.41	Startpunkte, für die das Newton-Verfahren nicht konvergiert . . . . .	270
9.42	Graph und Höhenlinien von $ N' $ mit $N'(x) = (2/3)(1 + i/x^3)$ . . . . .	271
9.43	Einzugsbereiche eines Newton-Verfahrens in $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . . . . .	272

- 9.44 Anzahl der Schritte eines Newton-Verfahrens in  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  . . . . . 272
- 9.46 Berechnung des Kreisradius aus Sehne und Bogenlänge . . . . . 275

## Liste der Programme

1.6	Zahlbereichsüberlauf . . . . .	5
1.7	Abfrage auf Gleichheit . . . . .	6
2.8	Horner-Schema für alle Ableitungen . . . . .	15
2.22	Herstellung eines Kettenbruchs . . . . .	29
3.12	Neville-Algorithmus . . . . .	40
3.55	Dividierte inverse, dividierte Differenzen, Kettenbruch und Newton-Polynom (MATLAB-Programm) . . . . .	74
4.17	Pascal-Programm zur adaptiven Simpson-Integration . . . . .	96
5.3	Pascal-Programm Gaußsches Eliminationsverfahren . . . . .	126
5.12	Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen beim Eliminationsverfahren . . . . .	138
7.50	Householder für lineare Gleichungssysteme . . . . .	210