

Gerd Fischer

# Analytische Geometrie

Eine Einführung für Studienanfänger

7., durchgesehene Auflage

Mit 129 Abbildungen



# Inhaltsverzeichnis

## 1. Affine Geometrie

### 1.0. Allgemeine affine Räume

1.0.1. Parallelverschiebungen. . . . .	1
1.0.2. Affine Unterräume von Vektorräumen. . . . .	1
1.0.3. Gruppenhomomorphismen und Untergruppen. . . . .	2
1.0.4. Operationen von Gruppen. . . . .	3
• 1.0.5. Affine Räume. . . . .	4
1.0.6. Vektorräume und affine Räume. . . . .	5
1.0.7. Parallelogramme, freie Vektoren, Ortsvektoren. . . . .	5
1.0.8. Synthetische Einführung affiner Räume. . . . .	6

### 1.1. Affine Abbildungen und Unterräume

1.1.0. Affine Abbildungen von Vektorräumen. . . . .	7
1.1.1. Affine Abbildungen affiner Räume. . . . .	8
1.1.2. Einfache Eigenschaften affiner Abbildungen. . . . .	9
1.1.3. Charakterisierung von Translationen. . . . .	11
1.1.4. Affine Unterräume. . . . .	11
1.1.5. Jeder affine Unterraum ist ein affiner Raum. . . . .	12
1.1.6. Durchschnitt und Verbindung affiner Räume. . . . .	12
1.1.7. Geometrische Charakterisierung affiner Unterräume. . . . .	13
1.1.8. Der Translationsraum des Verbindungsraumes. . . . .	15
1.1.9. Geometrische Charakterisierung des Verbindungsraumes. . . . .	16
1.1.10. Dimensionsformel. . . . .	17
1.1.11. Projektionen in Vektorräumen. . . . .	18
1.1.12. Parallele Unterräume, Parallelprojektionen. . . . .	19

### 1.2. Affine Koordinaten

1.2.1. Affin unabhängige Punkte, affine Basen. . . . .	21
1.2.2. Affine Basen und affine Abbildungen. . . . .	22
1.2.3. Affine Koordinatensysteme. . . . .	23
1.2.4. Das Teilverhältnis. . . . .	23
1.2.5. Drei Sätze der Elementargeometrie. . . . .	25
1.2.6. Parameterdarstellungen, Affinkombinationen. . . . .	26
1.2.7. Parameterdarstellung des Durchschnitts. . . . .	28
1.2.8. Beschreibung affiner Abbildungen durch Matrizen. . . . .	29
1.2.9. Fixpunkte. . . . .	30
1.2.10. Dilatationen. . . . .	31

1.3. Kollineationen	
1.3.1. Affinitäten und Kollineationen. . . . .	31
1.3.2. Körperautomorphismen . . . . .	32
1.3.3. Semiaffinitäten. . . . .	33
1.3.4. Der Hauptsatz der affinen Geometrie. . . . .	35
1.4. Quadriken	
1.4.0. Ellipse, Hyperbel und Parabel. . . . .	36
1.4.1. Definition von Quadriken. . . . .	53
1.4.2. Beispiel einer Hauptachsentransformation . . . . .	56
1.4.3. Satz über die Hauptachsentransformation. . . . .	57
1.4.4. Rechenverfahren für die Hauptachsentransformation. . . . .	61
1.4.5. Geometrische Äquivalenz und projektiver Abschluß. . . . .	64
1.4.6. Topologischer Abschluß. . . . .	65
1.4.7. Geometrischer Klassifikationssatz. . . . .	70
1.4.8. Normalformen. . . . .	72
1.5. Euklidische affine Räume	
1.5.1. Definitionen und Beispiele. . . . .	74
1.5.2. Isometrien'. . . . .	75
1.5.3. Kongruenzen. . . . .	76
1.5.4. Eulersche Winkel. . . . .	77
1.5.5. Ähnlichkeiten. . . . .	79
1.5.6. Geometrische Charakterisierung von Ähnlichkeiten. . . . .	80
1.5.7. Hauptachsenfransformation von Affinitäten. . . . .	81
1.5.8. Geometrische Hauptachsenkonstruktion. . . . .	82
1.5.9. Metrische Hauptachsentransformation von Quadriken. . . . .	85
1.5.10. Beispiele zur Hauptachsentransformation. . . . .	89
<b>2. Konvexe Mengen und lineare Optimierung</b>	
2.0. Problemstellung	
2.0.1. Ein Beispiel. . . . .	92
2.0.2. Formulierung der allgemeinen Aufgabe. . . . .	94
2.1. Konvexe Mengen und ihre Extrempunkte	
2.1.1. Strecken, konvexe Mengen, Halbräume. . . . .	95
2.1.2. Konvexe Hüllen und Konvexkombinationen. . . . .	96
2.1.3. Simplex und Polyeder. . . . .	97
2.1.4. Extrempunkte und Ecken. . . . .	98
2.1.5. Existenz optimaler Extrempunkte. . . . .	99
2.1.6. Berechnung der Extrempunkte. . . . .	100
2.1.7. Vorläufige Lösung der Optimierungsaufgabe. . . . .	102

2.2. Das Simplexverfahren	
2.2.1. Ein Trennungslemma	103
2.2.2. Polyeder und Lösungen von Ungleichungssystemen	104
2.2.3. Ein Satz von Minkowski	105
2.2.4. Kanten von Polyedern	106
2.2.5. Das Austauschlemma	107
2.2.6. Das Eckentableau	109
2.2.7. Charakterisierung optimaler Ecken	110
2.2.8. Einfache und mehrfache Ecken	111
2.2.9. Übergang zu einer benachbarten Ecke	112
2.2.10. Pivotsuche mit Hilfe charakteristischer Quotienten	114
2.2.11. Rechenverfahren für den Übergang	115
2.2.12. Lösung der Optimierungsaufgabe	117
2.2.13. Ein Beispiel	119
2.3. Ausnahmefälle	
2.3.1. Nicht kompakte Lösungsmenge	121
2.3.2. Mehrere optimale Ecken	122
2.3.3. Mehrfache Ecken	122
2.3.4. Pivotsuche bei mehrfachen Ecken	123
2.3.5. Stationärer Austausch	124
2.3.6. Konvexe Optimierung	125
<b>3. Projektive Geometrie</b>	
3.0. Vorbemerkungen	
3.1. Projektive Räume und Unterräume	
3.1.1. Projektive Räume	134
3.1.2. Homogene Koordinaten	134
3.1.3. Projektive Unterräume	135
3.1.4. Unendlich ferne Hyperebene	135
3.1.5. Durchschnitt und Verbindung	137
3.2. Projektive Abbildungen und Koordinaten	
3.2.1. Projektive Abbildungen	138
3.2.2. Projektive Räume und affine Räume	140
3.2.3. Abschluß affiner Räume	144
3.2.4. Projektiv unabhängige Punkte, projektive Basen	144
3.2.5. Projektivitäten mit vorgeschriebenen Werten	146
3.2.6. Projektive Koordinaten	147
3.2.7. Beschreibung von Projektivitäten durch Matrizen	147
3.2.8. Beschreibung von projektiven Unterräumen durch Gleichungen	149
3.2.9. Zentralprojektionen und Perspektivitäten	150

3.3. Invarianten von Projektivitäten	
3.3.1. Doppelverhältnis	.152
3.3.2. Berechnung des Doppelverhältnisses	.154
3.3.3. Doppelverhältnis bei Permutation der Punkte	.156
3.3.4. Doppelverhältnis und Teilverhältnis	.157
3.3.5. Harmonische Punktepaare	.157
3.3.6. Vollständige Vierseite	.158
3.3.7. Die Sätze von Desargues und Pappos	.159
3.3.8. Kollineationen und Semiprojektivitäten	.163
3.3.9. Der Hauptsatz der projektiven Geometrie	.163
3.3.10. Beweis des Hauptsatzes der affinen Geometrie	.168
3.4. Dualität	
3.4.1. Pol und Polare beim Kreis	.169
3.4.2. Korrelationen	.171
3.4.3. Dualer projektiver Raum	.172
3.4.4. Der Hauptsatz über Korrelationen	.173
3.4.5. Korrelationen und Sesquilinearformen	.173
3.4.6. Hyperebenenkoordinaten	.174
3.4.7. Das Dualitätsprinzip	.175
3.4.8. Hyperebenenbüschel	.177
3.5. Quadriken	
3.5.1. Homogene Polynome, Kegel, Quadriken	.179
3.5.2. Die Schnitte eines Kreiskegels	.181
3.5.3. Quadriken und Bilinearformen	.183
3.5.4. Projektive Bilder von Quadriken	.184
3.5.5. Projektive Hauptachsentransformation	.186
3.5.6. Rechenverfahren für die Hauptachsentransformation	.188
3.5.7. Bestimmung der Hauptachsenform	.191,
3.5.8. Verschiedene Gleichungen für eine Quadrik	.193
3.5.9. Geometrische Klassifikation	.195
3.5.10. Normalformen	.198
3.5.11. Tangenten und Tagentialhyperebenen	.201
3.5.12. Der Satz von Pascal	.202
Anhang. Das Erlanger Programm von Felix Klein	.208*
Literaturhinweise	.210J
Sachregister	.212'
Namensregister	.214
Symbolverzeichnis	.215