

Gerd Fischer

Analytische Geometrie

Eine Einführung für Studienanfänger

7., durchgesehene Auflage

Mit 129 Abbildungen



Inhaltsverzeichnis

1. Affine Geometrie

1.0. Allgemeine affine Räume

1.0.1. Parallelverschiebungen	1
1.0.2. Affine Unterräume von Vektorräumen	1
1.0.3. Gruppenhomomorphismen und Untergruppen	2
1.0.4. Operationen von Gruppen	3
• 1.0.5. Affine Räume	4
1.0.6. Vektorräume und affine Räume	5
1.0.7. Parallelogramme, freie Vektoren, Ortsvektoren	5
1.0.8. Synthetische Einführung affiner Räume	6

1.1. Affine Abbildungen und Unterräume

1.1.0. Affine Abbildungen von Vektorräumen	7
1.1.1. Affine Abbildungen affiner Räume	8
1.1.2. Einfache Eigenschaften affiner Abbildungen	9
1.1.3. Charakterisierung von Translationen	11
1.1.4. Affine Unterräume	11
1.1.5. Jeder affine Unterraum ist ein affiner Raum	12
1.1.6. Durchschnitt und Verbindung affiner Räume	12
1.1.7. Geometrische Charakterisierung affiner Unterräume	13
1.1.8. Der Translationsraum des Verbindungsraumes	15
1.1.9. Geometrische Charakterisierung des Verbindungsraumes	16
1.1.10. Dimensionsformel	17
1.1.11. Projektionen in Vektorräumen	18
1.1.12. Parallele Unterräume, Parallelprojektionen	19

1.2. Affine Koordinaten

1.2.1. Affin unabhängige Punkte, affine Basen	21
1.2.2. Affine Basen und affine Abbildungen	22
1.2.3. Affine Koordinatensysteme	23
1.2.4. Das Teilverhältnis	23
1.2.5. Drei Sätze der Elementargeometrie	25
1.2.6. Parameterdarstellungen, Affinkombinationen	26
1.2.7. Parameterdarstellung des Durchschnitts	28
1.2.8. Beschreibung affiner Abbildungen durch Matrizen	29
1.2.9. Fixpunkte	30
1.2.10. Dilatationen	31

1.3. Kollineationen	
1.3.1. Affinitäten und Kollineationen.	31
1.3.2. Körperautomorphismen	32
1.3.3. Semiaffinitäten.	33
1.3.4. Der Hauptsatz der affinen Geometrie.	35
1.4. Quadriken	
1.4.0. Ellipse, Hyperbel und Parabel.	36
1.4.1. Definition von Quadriken.	53
1.4.2. Beispiel einer Hauptachsentransformation.	56
1.4.3. Satz über die Hauptachsentransformation.	57
1.4.4. Rechenverfahren für die Hauptachsentransformation.	61
1.4.5. Geometrische Äquivalenz und projektiver Abschluß.	64
1.4.6. Topologischer Abschluß.	65
1.4.7. Geometrischer Klassifikationssatz.	70
1.4.8. Normalformen.	72
1.5. Euklidische affine Räume	
1.5.1. Definitionen und Beispiele.	74
1.5.2. Isometrien'.	75
1.5.3. Kongruenzen.	76
1.5.4. Eulersche Winkel.	77
1.5.5. Ähnlichkeiten.	79
1.5.6. Geometrische Charakterisierung von Ähnlichkeiten.	80
1.5.7. Hauptachsenfransformation von Affinitäten.	81
1.5.8. Geometrische Hauptachsenkonstruktion.	82
1.5.9. Metrische Hauptachsentransformation von Quadriken.	85
1.5.10. Beispiele zur Hauptachsentransformation.	89
2. Konvexe Mengen und lineare Optimierung	
2.0. Problemstellung	
2.0.1. Ein Beispiel.	92
2.0.2. Formulierung der allgemeinen Aufgabe.	94
2.1. Konvexe Mengen und ihre Extrempunkte	
2.1.1. Strecken, konvexe Mengen, Halbräume.	95
2.1.2. Konvexe Hüllen und Konvexkombinationen.	96
2.1.3. Simplex und Polyeder.	97
2.1.4. Extrempunkte und Ecken.	98
2.1.5. Existenz optimaler Extrempunkte.	99
2.1.6. Berechnung der Extrempunkte.	100
2.1.7. Vorläufige Lösung der Optimierungsaufgabe.	102

2.2. Das Simplexverfahren	
2.2.1. Ein Trennungslemma 103
2.2.2. Polyeder und Lösungen von Ungleichungssystemen 104
2.2.3. Ein Satz von Minkowski 105
2.2.4. Kanten von Polyedern 106
2.2.5. Das Austauschlemma 107
2.2.6. Das Eckentableau 109
2.2.7. Charakterisierung optimaler Ecken 110
2.2.8. Einfache und mehrfache Ecken 111
2.2.9. Übergang zu einer benachbarten Ecke 112
2.2.10. Pivotsuche mit Hilfe charakteristischer Quotienten 114
2.2.11. Rechenverfahren für den Übergang 115
2.2.12. Lösung der Optimierungsaufgabe 117
2.2.13. Ein Beispiel 119
2.3. Ausnahmefälle	
2.3.1. Nicht kompakte Lösungsmenge 121
2.3.2. Mehrere optimale Ecken 122
2.3.3. Mehrfache Ecken 122
2.3.4. Pivotsuche bei mehrfachen Ecken 123
2.3.5. Stationärer Austausch 124
2.3.6. Konvexe Optimierung 125
3. Projektive Geometrie	
3.0. Vorbemerkungen	
3.1. Projektive Räume und Unterräume	
3.1.1. Projektive Räume 134
3.1.2. Homogene Koordinaten 134
3.1.3. Projektive Unterräume 135
3.1.4. Unendlich ferne Hyperebene 135
3.1.5. Durchschnitt und Verbindung 137
3.2. Projektive Abbildungen und Koordinaten	
3.2.1. Projektive Abbildungen 138
3.2.2. Projektive Räume und affine Räume 140
3.2.3. Abschluß affiner Räume 144
3.2.4. Projektiv unabhängige Punkte, projektive Basen 144
3.2.5. Projektivitäten mit vorgeschriebenen Werten 146
3.2.6. Projektive Koordinaten 147
3.2.7. Beschreibung von Projektivitäten durch Matrizen 147
3.2.8. Beschreibung von projektiven Unterräumen durch Gleichungen 149
3.2.9. Zentralprojektionen und Perspektivitäten 150

3.3. Invarianten von Projektivitäten	
3.3.1. Doppelverhältnis	.152
3.3.2. Berechnung des Doppelverhältnisses	.154
3.3.3. Doppelverhältnis bei Permutation der Punkte	.156
3.3.4. Doppelverhältnis und Teilverhältnis	.157
3.3.5. Harmonische Punktepaare	.157
3.3.6. Vollständige Vierseite	.158
3.3.7. Die Sätze von Desargues und Pappos	.159
3.3.8. Kollineationen und Semiprojektivitäten	.163
3.3.9. Der Hauptsatz der projektiven Geometrie	.163
3.3.10. Beweis des Hauptsatzes der affinen Geometrie	.168
3.4. Dualität	
3.4.1. Pol und Polare beim Kreis	.169
3.4.2. Korrelationen	.171
3.4.3. Dualer projektiver Raum	.172
3.4.4. Der Hauptsatz über Korrelationen	.173
3.4.5. Korrelationen und Sesquilinearformen	.173
3.4.6. Hyperebenenkoordinaten	.174
3.4.7. Das Dualitätsprinzip	.175
3.4.8. Hyperebenenbüschel	.177
3.5. Quadriken	
3.5.1. Homogene Polynome, Kegel, Quadriken	.179
3.5.2. Die Schnitte eines Kreiskegels	.181
3.5.3. Quadriken und Bilinearformen	.183
3.5.4. Projektive Bilder von Quadriken	.184
3.5.5. Projektive Hauptachsentransformation	.186
3.5.6. Rechenverfahren für die Hauptachsentransformation	.188
3.5.7. Bestimmung der Hauptachsenform	.191,
3.5.8. Verschiedene Gleichungen für eine Quadrik	.193
3.5.9. Geometrische Klassifikation	.195
3.5.10. Normalformen	.198
3.5.11. Tangenten und Tagentialhyperebenen	.201
3.5.12. Der Satz von Pascal	.202
Anhang. Das Erlanger Programm von Felix Klein	.208*
Literaturhinweise	.210J
Sachregister	.212'
Namensregister	.214
Symbolverzeichnis	.215