
Claus Wilhelm Turtur

Prüfungstrainer Mathematik

Klausur- und Übungsaufgaben mit
vollständigen Musterlösungen

5., aktualisierte Auflage



Springer Spektrum

Inhalt

Vorwort	V
Zum richtigen Gebrauch dieses Buches	VI
1 Mengenlehre	1
Aufgabe 1.1 Verknüpfung von Mengen	1
Aufgabe 1.2 Verknüpfung von Mengen	3
Aufgabe 1.3 Bestimmung einer Zahlenmenge	4
Aufgabe 1.4 Bekannte Zahlen-Grundmengen	6
Aufgabe 1.5 Mengen-Operationssymbole	6
2 Elementarmathematik	9
Aufgabe 2.1 Periodische Dezimalbrüche	9
Aufgabe 2.2 Gauß'sche Summenformel	10
Aufgabe 2.3 Betragsgleichungen mit Fallunterscheidungen	12
Aufgabe 2.4 pq-Formel in den reellen und komplexen Zahlen	16
Aufgabe 2.5 Ungleichungen mit Fallunterscheidungen	17
Aufgabe 2.6 Wurzelgleichungen	24
Aufgabe 2.7 Rechnen mit Logarithmen	27
Aufgabe 2.8 Gleichungen mit Logarithmen	29
Aufgabe 2.9 Anwendungsbeispiel zu Logarithmen	30
Aufgabe 2.10 Zahlensysteme verschiedener Basen	31
Aufgabe 2.11 Bruchrechnung in S-adischen Systemen	34
Aufgabe 2.12 Rechnen im Dualsystem	39
Aufgabe 2.13 B-Komplement-Darstellung	42
Aufgabe 2.14 Ungleichungen mit Fallunterscheidungen	44
Aufgabe 2.15 Binomialkoeffizienten	47
Aufgabe 2.16 Binomialkoeffizienten	48
Aufgabe 2.17 Der binomische Lehrsatz	49
Aufgabe 2.18 Winkelfunktionen, Additionstheoreme	50

Aufgabe 2.19 Polynomdivision	53
Aufgabe 2.20 Faktorisierung von Polynomen	53
Aufgabe 2.21 Polynomdivision mittels Horner-Schema	55
Aufgabe 2.22 Nullstellen von Polynomen	56
Aufgabe 2.23 Symmetrie von Funktionen	57
Aufgabe 2.24 Bildung von Umkehrfunktionen	58
Aufgabe 2.25 Funktionsdarstellung in Polarkoordinaten	59
Aufgabe 2.26 Geradengleichung	61
Aufgabe 2.27 Logarithmische Funktionsdarstellung	62
Aufgabe 2.28 Bestimmung einer Parabel	63
Aufgabe 2.29 Textbeispiel – Exponentialfunktion	63
Aufgabe 2.30 Textbeispiel – Cosinus Hyperbolicus	65
Aufgabe 2.31 Goniometrische Gleichungen	66
Aufgabe 2.32 Vollständige Induktion	70
3 Aussagenlogik	73
Vorbemerkung zur Notation	73
Aufgabe 3.1 Erstellen von Wahrheitstabellen	74
Aufgabe 3.2 Konjunktive und disjunktive Normalform	76
Aufgabe 3.3 Vereinfachen Boole'scher Ausdrücke	77
Aufgabe 3.4 Karnaugh-Veitch-Diagramme	78
Aufgabe 3.5 Beweise in Boole'scher Algebra	81
Aufgabe 3.6 Spezielle Verknüpfungen	83
4 Geometrie und Vektorrechnung	85
Aufgabe 4.1 Berechnungen in Dreieck und Viereck	85
Aufgabe 4.2 Winkelfunktionen – berechnen spezieller Werte	87
Aufgabe 4.3 Textbeispiel - Kreisberechnung	88
Aufgabe 4.4 Winkelfunktionen – Werte ohne Taschenrechner	89
Aufgabe 4.5 Additionstheoreme	90
Aufgabe 4.6 Textbeispiel – Navigation	91
Aufgabe 4.7 Textbeispiel – Kugelabschnitt	92
Aufgabe 4.8 Textbeispiel – Kegel	93
Aufgabe 4.9 Textbeispiel – Kreis	94

Aufgabe 4.10 Textbeispiel – Kugel.....	96
Aufgabe 4.11 Vektorprodukte	99
Aufgabe 4.12 Lineare Abhängigkeit von Vektoren.....	100
Aufgabe 4.13 Abstand eines Punktes zu einer Geraden.....	101
Aufgabe 4.14 Ebenengleichung in verschiedenen Formen.....	102
Aufgabe 4.15 Lage von Punkten in einer Ebene.....	104
Aufgabe 4.16 Abstand eines Punktes von einer Ebene	105
Aufgabe 4.17 Abstand eines Punktes von einer Geraden.....	107
Aufgabe 4.18 Ebenengleichung in kartesischen Koordinaten	108
Aufgabe 4.19 Schnittpunkt von Geraden	109
Aufgabe 4.20 Schnittgeraden von Ebenen	111
Aufgabe 4.21 Schnittpunkt der Mittelsenkrechten im Dreieck.....	113
Aufgabe 4.22 Ellipsengleichung	115
Aufgabe 4.23 Ellipse und Hyperbel als Kegelschnitte.....	116
Aufgabe 4.24 Koordinatentransformation – Drehung.....	120
Aufgabe 4.25 Polarkoordinaten	121
Aufgabe 4.26 Kugelkoordinaten	122
Aufgabe 4.27 Textbeispiel – Vektorrechnung	124
5 Lineare Algebra.....	127
Aufgabe 5.1 Multiplikation von Matrizen.....	127
Aufgabe 5.2 Matrixmultiplikation, Falk'sches Schema	128
Aufgabe 5.3 Berechnung von Determinanten	130
Aufgabe 5.4 Regel von Sarrus für 3x3-Determinanten.....	131
Aufgabe 5.5 Inversion von Matrizen	132
Aufgabe 5.6 Rang von Matrizen	134
Aufgabe 5.7 Lösen linearer Gleichungssysteme	135
Aufgabe 5.8 Lösen linearer Gleichungssysteme	137
Aufgabe 5.9 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	138
Aufgabe 5.10 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	140
6 Differentialrechnung.....	143
Aufgabe 6.1 Berechnung von Differentialquotienten	143
Aufgabe 6.2 Ableiten: Summenregel, Faktorregel, Produktregel	144

Aufgabe 6.3 Ableiten mit Produktregel.....	145
Aufgabe 6.4 Ableiten mit Quotientenregel.....	146
Aufgabe 6.5 Ableiten mit Kettenregel.....	147
Aufgabe 6.6 Mehrfache Verschachtelung der Kettenregel.....	148
Aufgabe 6.7 Vermischtes Anwenden von Ableitungsregeln.....	150
Aufgabe 6.8 Höhere Ableitungen.....	153
Aufgabe 6.9 Implizites Ableiten.....	154
Aufgabe 6.10 Ableiten in Parameterdarstellung und Polarkoordinaten.....	155
Aufgabe 6.11 Kurvendiskussionen verschiedenster Art.....	160
Aufgabe 6.12 Beispiel – Harmonischer Oszillator.....	178
Aufgabe 6.13 Maximalwertaufgabe – Biegebalken.....	179
Aufgabe 6.14 Maximalwertaufgabe – Flächenbestimmung.....	180
Aufgabe 6.15 Maximalwertaufgabe – Konservendose.....	181
Aufgabe 6.16 Maximalwertaufgabe – Dreieck.....	183
Aufgabe 6.17 Maximalewertaufgabe – Fertigungslosgröße.....	184
Aufgabe 6.18 Krümmung von Kurven.....	187
7 Integralrechnung.....	191
Aufgabe 7.1 Integration von Polynomen.....	191
Aufgabe 7.2 Integration mittels Substitution.....	192
Aufgabe 7.3 Partielle Integration.....	196
Aufgabe 7.4 Integration nach geeigneter Umformung.....	199
Aufgabe 7.5 Integration nach Partialbruchzerlegung.....	202
Aufgabe 7.6 Substitutionen mit Rechenrick.....	211
Aufgabe 7.7 Demonstrationsbeispiel Integrationskonstante.....	216
Aufgabe 7.8 Integration abschnittsweise gegebener Funktionen.....	218
Aufgabe 7.9 Bestimmte Integrale mit Substitution.....	220
Aufgabe 7.10 Uneigentliche Integrale.....	221
Aufgabe 7.11 Spezielle bestimmte Integrale.....	222
Aufgabe 7.12 Linearer-, quadratischer- und Betragsmittelwert.....	225
Aufgabe 7.13 Flächenberechnung mittels Integralrechnung.....	227
Aufgabe 7.14 Numerische Integration: Simpson-Verfahren.....	231
Aufgabe 7.15 Schnittflächen zwischen Funktionen.....	234
Aufgabe 7.16 Integration in Parameterdarstellung.....	237

Aufgabe 7.17 Integration in Polarkoordinaten.....	240
Aufgabe 7.18 Bogenlängenberechnung mittels Integration	242
Aufgabe 7.19 Berechnung eines Rotationsvolumens.....	244
Aufgabe 7.20 Berechnung eines Rotationsvolumens.....	245
Aufgabe 7.21 Berechnung einer Rotationsoberfläche.....	247
Aufgabe 7.22 Bogenlängenberechnung	249
8 Komplexe Zahlen	251
Aufgabe 8.1 Grundrechenarten mit komplexen Zahlen	251
Aufgabe 8.2 Umwandlung zwischen Darstellungsformen.....	252
Aufgabe 8.3 Berechnungen in verschiedenen Darstellungsformen	256
Aufgabe 8.4 Anwendungsbeispiel zur Euler-Formel	258
Aufgabe 8.5 Wurzeln und Logarithmen.....	259
Aufgabe 8.6 Vertiefende Rechenbeispiele.....	266
Aufgabe 8.7 Winkelfunktionen und Hyperbelfunktionen.....	268
Aufgabe 8.8 Faktorisierung komplexer Polynome.....	270
Aufgabe 8.9 Komplexwertige Partialbruchzerlegung	273
Aufgabe 8.10 Lösungsmengen komplexzahliger Gleichungen.....	274
Aufgabe 8.11 Zeichnen von Ortskurven	279
Aufgabe 8.12 Arbeiten mit Ortskurven.....	280
Aufgabe 8.13 Textbeispiel – komplexe Wechselstromwiderstände	282
Aufgabe 8.14 Textbeispiel – komplexe Wechselstromwiderstände	283
9 Funktionen mehrerer Variabler und Vektoranalysis	285
Aufgabe 9.1 Parameterdarstellung einer mehrdim. Funktion	285
Aufgabe 9.2 Höhenliniendiagramme mehrdim. Funktionen.....	287
Aufgabe 9.3 Partielle Ableitungen, Satz von Schwarz.....	289
Aufgabe 9.4 Partielle Ableitungen, Satz von Schwarz.....	290
Aufgabe 9.5 Totales Differential, lineare Näherung	291
Aufgabe 9.6 Totales Differential, lineare Näherung	293
Aufgabe 9.7 Ebenengleichung einer Tangentialebene	295
Aufgabe 9.8 Differentialformen, Integrabilitätsbedingung	296
Aufgabe 9.9 Ableiten implizit gegebener Funktionen.....	298
Aufgabe 9.10 Extremwerte mehrdimensionaler Funktionen.....	300

Aufgabe 9.11 Gleichung eines Rotationsparaboloids.....	303
Aufgabe 9.12 Unbestimmte Mehrfachintegrale.....	303
Aufgabe 9.13 Bestimmte Mehrfachintegrale.....	305
Aufgabe 9.14 Textbeispiel – Mehrfachintegral	306
Aufgabe 9.15 Flächenberechnung in Polarkoordinaten	307
Aufgabe 9.16 Schwerpunktsberechnung einer Fläche	308
Aufgabe 9.17 Schwerpunktsberechnung einer Fläche	309
Aufgabe 9.18 Schwerpunktsberechnung in Polarkoordinaten	310
Aufgabe 9.19 Schwerpunktsberechnung einer Fläche.....	313
Aufgabe 9.20 Schwerpunktsberechnung eines Rotationsvolumens	314
Aufgabe 9.21 Massenträgheitsmomente der Rotation	316
Aufgabe 9.22 Vektorwertiges Integral.....	317
Aufgabe 9.23 Volumenintegration in Kugelkoordinaten	320
Aufgabe 9.24 Gradienten von Skalarfeldern	322
Aufgabe 9.25 Richtungsableitungen in Skalarfeldern	323
Aufgabe 9.26 Richtungsableitungen in Skalarfeldern	324
Aufgabe 9.27 Totales Differential im Skalarfeld.....	325
Aufgabe 9.28 Vektorfelder, Konservatives Kraftfeld	326
Aufgabe 9.29 Linienintegrale in Vektorfeldern	328
Aufgabe 9.30 Das Potentialfeld eines Vektorfeldes.....	330
Aufgabe 9.31 Divergenz und Rotation von Vektorfeldern	331
Aufgabe 9.32 Das Potentialfeld eines Vektorfeldes.....	333
Aufgabe 9.33 Das Potentialfeld eines Vektorfeldes.....	334
Aufgabe 9.34 Bsp. für ein zentralsymmetrisches Potentialfeld.....	335
Aufgabe 9.35 Vektorfelder in Kugelkoordinaten.....	336
10 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.....	339
Aufgabe 10.1 Textbeispiel – Permutationen.....	339
Aufgabe 10.2 Textbeispiel – Kombinationen	339
Aufgabe 10.3 Textbeispiel – Variationen.....	340
Aufgabe 10.4 Textbsp. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	341
Aufgabe 10.5 Textbsp. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	343
Aufgabe 10.6 Textbsp. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	343
Aufgabe 10.7 Textbsp. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	345

Aufgabe 10.8 Textbsp. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten.....	346
Aufgabe 10.9 Textbsp. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten.....	347
Aufgabe 10.10 Textbsp. zum konsequenten logischen Denken.....	349
Aufgabe 10.11 Diskrete Verteilung: Erwartungswert und Varianz	350
Aufgabe 10.12 Kontinuierliche Verteilung: Dichte	
Aufgabe 10.13 Binomialverteilung.....	360
Aufgabe 10.14 Kontinuierliche Verteilung: Erwartungswert, Varianz	361
Aufgabe 10.15 Gauß-Verteilung, ihre Kenngrößen	363
Aufgabe 10.16 Konfidenzintervalle der Gauß-Verteilung	366
Aufgabe 10.17 Stichprobe und Grundgesamtheit	368
Aufgabe 10.18 Spezielle Konfidenzintervalle bei Gauß.....	370
Aufgabe 10.19 Verschiedene Mittelwerte	371
Aufgabe 10.20 Textbeispiel – Poissonverteilung	372
Aufgabe 10.21 Textbeispiel – Poissonverteilung	373
Aufgabe 10.22 Textbeispiel – Exponentialverteilung	373
Aufgabe 10.23 Textbeispiel – Hypergeometrische Verteilung.....	375
Aufgabe 10.24 Das Geburtstagsproblem	376
Aufgabe 10.25 Das Rosinenproblem	380
Aufgabe 10.26 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung	382
Aufgabe 10.27 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung	383
Aufgabe 10.28 Regressionsgerade.....	384
Aufgabe 10.29 Nichtlineare Regression.....	387
Aufgabe 10.30 Regressionsgerade	390
Aufgabe 10.31 Nichtlineare Regression.....	391
Aufgabe 10.32 Chi-Quadrat-Test einer Gleichverteilung	394
Aufgabe 10.33 Chi-Quadrat-Test einer Gauß-Verteilung.....	395
11 Folgen und Reihen.....	401
Aufgabe 11.1 Erkennen von Bildungsgesetzen.....	401
Aufgabe 11.2 Grenzwerte konvergenter Folgen	401
Aufgabe 11.3 Endliche Reihe (als Summenformel).....	403
Aufgabe 11.4 Textbsp. zum konsequenten logischen Denken	404
Aufgabe 11.5 Zinseszins-Berechnung (geometrische Reihe).....	404
Aufgabe 11.6 Zinseszins-Berechnung (geometrische Reihe).....	405
Aufgabe 11.7 Effektiver Jahreszins (geometrische Folge).....	406

Aufgabe 11.8 Kapitalwert zu verschiedenen Zeitpunkten.....	406
Aufgabe 11.9 Tilgungsrechnung, Ratentilgung	408
Aufgabe 11.10 Tilgungsrechnung, Annuitätentilgung.....	410
Aufgabe 11.11 Binomialkoeffizienten.....	412
Aufgabe 11.12 Binomischer Lehrsatz	413
Aufgabe 11.13 Näherungsrechnung – Binomischer Lehrsatz	414
Aufgabe 11.14 Grenzwert einer unendl. geometrischen Reihe	415
Aufgabe 11.15 Textbeispiel zu einer endlichen Reihe.....	415
Aufgabe 11.16 Grenzwerte konvergenter Reihen.....	416
Aufgabe 11.17 Konvergenzuntersuchungen an Reihen.....	418
Aufgabe 11.18 Konvergenzuntersuchungen an Reihen.....	422
Aufgabe 11.19 Konvergenzradien von Potenzreihen	422
Aufgabe 11.20 Konvergenzradius einer komplexen Potenzreihe	425
Aufgabe 11.21 Entwicklung von Mac Laurin-Reihen.....	426
Aufgabe 11.22 Entwicklung von Taylor-Reihen	432
Aufgabe 11.23 Verknüpfen von Potenzreihen	434
Aufgabe 11.24 Integration einer Potenzreihe	436
Aufgabe 11.25 Restgliedabschätzung nach Lagrange	436
Aufgabe 11.26 Näherungspolynome aus Potenzreihen	437
Aufgabe 11.27 Näherungspolynome aus Potenzreihen	439
Aufgabe 11.28 L'Hospital'sche Regel	442
Aufgabe 11.29 Funktionswerte aus Taylorreihen	444
Aufgabe 11.30 Reellwertige Fourier-Reihe.....	446
Aufgabe 11.31 Reellwertige Fourier-Reihe.....	448
Aufgabe 11.32 Reellwertige Fourier-Reihe.....	451
Aufgabe 11.33 Komplexwertige Fourier-Reihe	453
12 Gewöhnliche Differentialgleichungen.....	455
Aufgabe 12.1 Die Methode der Variablenrennung.....	455
Aufgabe 12.2 Aufsuchen von Partikulärlösungen von Dgln.	457
Aufgabe 12.3 Implizite Lösungen von Dgln.	464
Aufgabe 12.4 Isoklinen von Differentialgleichungen	465
Aufgabe 12.5 Singuläre Lösungen von Differentialgleichungen	467
Aufgabe 12.6 Exakte Differentialgleichungen	469

Aufgabe 12.7 Inhomogene lineare Differentialgleichungen	471
Aufgabe 12.8 Homogene lineare Dgln. 2. Ordnung	475
Aufgabe 12.9 Inhomogene lineare Dgln. 2. Ordnung	476
Aufgabe 12.10 Homogene lineare Dgln. n-ter Ordnung	478
Aufgabe 12.11 Inhomogene lineare Dgln. n-ter Ordnung	481
13 Funktionaltransformationen	483
Vorbemerkung	483
Aufgabe 13.1 Fourier-Transformationen	483
Aufgabe 13.2 Laplace-Transformationen nach Definition	486
Aufgabe 13.3 Laplace-Transformationen nach Korrespondenztabelle	488
Aufgabe 13.4 Laplace-Rücktransformationen, Faltungsprodukt	492
Aufgabe 13.5 Laplace- Rücktransformationen (allgemein)	494
Aufgabe 13.6 Lösen von Dgln. mittels Laplace-Transformation	497
14 Musterklausuren (verschiedener Hochschulen)	501
Klausur 14.1: Analysis 1 (1. Semester)	501
Klausur 14.2: Analysis 2 (2. Semester)	502
Klausur 14.3: Erstes Semester (Grundlagen und Differentialrechnung)	504
Klausur 14.4: Zweites Semester (verschiedene Themen)	505
Klausur 14.5: Drittes Semester (anwendungsnahe Themen)	507
Klausur 14.6: Drittes Semester (anwendungsnahe Themen)	508
Klausur 14.7: Erstes Semester (Master / Bachelor-Programm)	510
Klausur 14.8: Zweites Semester (Master / Bachelor-Programm)	511
Lösungen zur Klausur Nr. 14.1	512
Lösungen zur Klausur Nr. 14.2	515
Lösungen zur Klausur Nr. 14.3	518
Lösungen zur Klausur Nr. 14.4	521
Lösungen zur Klausur Nr. 14.5	526
Lösungen zur Klausur Nr. 14.6	529
Lösungen zur Klausur Nr. 14.7	533
Lösungen zur Klausur Nr. 14.8	537

15 Anhang: Tabellen und Formeln	543
15.1 Formeln zu Kapitel 1	543
15.2 Formeln zu Kapitel 2	544
15.3 Formeln zu Kapitel 3	546
15.4 Formeln zu Kapitel 4	546
15.5 Formeln zu Kapitel 5	550
15.6 Formeln zu Kapitel 6	551
15.7 Formeln zu Kapitel 7	553
15.8 Formeln zu Kapitel 8	556
15.9 Formeln zu Kapitel 9	557
15.10 Formeln zu Kapitel 10	560
15.11 Formeln zu Kapitel 11	564
15.12 Formeln zu Kapitel 12	567
15.13 Formeln zu Kapitel 13	568
15.14 Tabelle 1: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	570
15.15 Tabelle 2: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung.....	571
15.16 Tabelle 3: Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation.....	572
15.17 Tabelle 4: Einige Ableitungen und unbestimmte Integrale.....	573
15.18 Literaturhinweise	574
Sachwortverzeichnis	575