

Jürgen Koch
Martin Stämpfle

Mathematik

für das Ingenieurstudium

4., aktualisierte Auflage

Mit 637 Abbildungen, 507 durchgerechneten Beispielen und 384 Aufgaben
mit ausführlichen Lösungen im Internet unter www.mathematik-fuer-ingenieure.de

HANSER

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	19
1.1	Logik und Mengen	19
1.1.1	Aussagenlogik	19
1.1.2	Mengen	22
1.2	Zahlen	25
1.2.1	Natürliche Zahlen	25
1.2.2	Ganze Zahlen	26
1.2.3	Rationale Zahlen	27
1.2.4	Reelle Zahlen	28
1.2.5	Ordnung	30
1.2.6	Intervalle	31
1.2.7	Betrag und Signum	32
1.2.8	Summe und Produkt	35
1.3	Potenz und Wurzel	36
1.3.1	Potenzen	36
1.3.2	Potenzgesetze	37
1.3.3	Wurzeln	37
1.3.4	Binomischer Satz	38
1.4	Trigonometrie	40
1.4.1	Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck	40
1.4.2	Winkel im Grad- und Bogenmaß	42
1.4.3	Sinus- und Kosinussatz	43
1.5	Gleichungen und Ungleichungen	44
1.5.1	Lineare Gleichungen	45
1.5.2	Potenzgleichungen	46
1.5.3	Quadratische Gleichungen	46
1.5.4	Wurzelgleichungen	48
1.5.5	Ungleichungen	49
1.6	Beweise	51
1.6.1	Direkter Beweis	52
1.6.2	Indirekter Beweis	52
1.6.3	Konstruktiver Beweis	53
1.6.4	Vollständige Induktion	54
1.7	Aufgaben	56
2	Lineare Gleichungssysteme	61
2.1	Einführung	61

2.2	Gauß-Algorithmus	63
2.2.1	Äquivalenzumformungen	64
2.2.2	Vorwärtselemination	65
2.2.3	Rückwärtseinsetzen	66
2.2.4	Gaußsches Eliminationsverfahren	67
2.2.5	Rechenschema	68
2.3	Spezielle Typen linearer Gleichungssysteme	70
2.3.1	Lineare Gleichungssysteme ohne Lösung	70
2.3.2	Lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen	71
2.3.3	Systeme mit redundanten Gleichungen	72
2.3.4	Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme	73
2.3.5	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme	74
2.3.6	Homogene lineare Gleichungssysteme	75
2.3.7	Lineare Gleichungssysteme mit Parametern	77
2.4	Numerische Verfahren	79
2.4.1	Jacobi-Iteration	79
2.4.2	Gauß-Seidel-Iteration	80
2.5	Anwendungen	81
2.5.1	Produktion	81
2.5.2	Metzwerkanalyse in der Elektrotechnik	82
2.6	Aufgaben	83
3	Vektoren	85
3.1	Der Begriff eines Vektors	85
3.2	Vektorrechnung ohne Koordinaten	87
3.2.1	Addition und Subtraktion	87
3.2.2	Skalare Multiplikation	89
3.2.3	Skalarprodukt	90
3.2.4	Vektorprodukt	94
3.2.5	Spatprodukt	96
3.2.6	Lineare Unabhängigkeit	98
3.3	Vektoren in Koordinatendarstellung	102
3.3.1	Koordinatendarstellung	103
3.3.2	Addition und Subtraktion	104
3.3.3	Skalare Multiplikation	105
3.3.4	Skalarprodukt	105
3.3.5	Vektorprodukt	107
3.3.6	Spatprodukt	109
3.3.7	Lineare Unabhängigkeit	109
3.4	Punkte, Geraden und Ebenen	112
3.4.1	Kartesisches Koordinatensystem	112
3.4.2	Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen	114
3.4.3	Parameterfreie Darstellung von Geraden und Ebenen	116
3.4.4	Schnitte von Geraden und Ebenen	117
3.4.5	Abstände	119

3.4.6	Winkel	122
3.5	Anwendungen	124
3.5.1	Kraft	124
3.5.2	Arbeit	124
3.5.3	Drehmoment	125
3.6	Aufgaben	126
4	Matrizen	131
4.1	Der Begriff einer Matrix	131
4.2	Rechnen mit Matrizen	135
4.2.1	Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation	136
4.2.2	Multiplikation von Matrizen	137
4.3	Determinanten	143
4.3.1	Determinante einer (2,2)-Matrix	143
4.3.2	Determinante einer (3,3)-Matrix	145
4.3.3	Determinante einer (n,n)-Matrix	149
4.4	Inverse Matrix	152
4.4.1	Invertierbare Matrizen	153
4.4.2	Inverse einer (2,2)-Matrix	154
4.4.3	Inverse Matrix und lineares Gleichungssystem	155
4.4.4	Orthogonale Matrizen	155
4.5	Lineare Abbildungen	156
4.5.1	Matrizen als Abbildungen	156
4.5.2	Koordinatentransformation	158
4.5.3	Kern, Bild und Rang	159
4.6	Eigenwerte und Eigenvektoren	160
4.7	Numerische Verfahren	166
4.8	Anwendungen	167
4.9	Aufgaben	169
5	Funktionen	173
5.1	Relationen und Funktionen	173
5.1.1	Relationen	173
5.1.2	Funktionen	174
5.2	Reelle Funktionen	176
5.2.1	Definitionsmenge, Zielmenge und Wertemenge	176
5.2.2	Wertetabelle und Schaubild	178
5.2.3	Explizite und implizite Darstellung	180
5.2.4	Abschnittsweise definierte Funktionen	181
5.2.5	Funktionsschar	183
5.2.6	Verkettung von Funktionen	184
5.3	Eigenschaften	187
5.3.1	Symmetrie	188
5.3.2	Periode	191
5.3.3	Monotonie	192
5.3.4	Beschränktheit	193

5.4	Das Prinzip der Umkehrfunktion	194
5.5	Anwendungen	197
5.5.1	Messwerte	197
5.5.2	Kennfelder	198
5.6	Aufgaben	199
6	Elementare Funktionen	201
6.1	Potenz- und Wurzelfunktionen	201
6.1.1	Potenzfunktionen	201
6.1.2	Wurzelfunktionen	203
6.2	Polynome und gebrochenrationale Funktionen	204
6.2.1	Polynome	204
6.2.2	Gebrochenrationale Funktionen	212
6.3	Sinus, Kosinus, Tangens und Arkusfunktionen	220
6.3.1	Definition am Einheitskreis	220
6.3.2	Eigenschaften	221
6.3.3	Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion	224
6.3.4	Arkusfunktionen	226
6.4	Exponential- und Logarithmusfunktionen	*231
6.4.1	Exponentialfunktionen	231
6.4.2	Die e-Funktion	232
6.4.3	Logarithmusfunktionen	234
6.5	Hyperbel- und Areafunktionen	237
6.5.1	Hyperbelfunktionen	237
6.5.2	Areafunktionen	239
6.6	Anwendungen	240
6.6.1	Freileitungen	240
6.6.2	Industrieroboter	241
6.7	Aufgaben	242
7	Folgen, Grenzwerte und Stetigkeit	245
7.1	Folgen	245
7.1.1	Zahlenfolgen	245
7.1.2	Grenzwert einer Folge	249
7.2	Funktionsgrenzwerte	253
7.3	Stetigkeit	255
7.4	Asymptotisches Verhalten	260
7.5	Numerische Verfahren	264
7.5.1	Berechnung von Funktionswerten	265
7.5.2	Bisektionsverfahren	266
7.6	Anwendungen	268
7.7	Aufgaben	269
8	Differenzialrechnung	271
8.1	Steigung und Ableitungsfunktion	271
8.1.1	Tangente und Differenzierbarkeit	271

8.1.2	Differenzial	275
8.1.3	Ableitungsfunktion	275
8.1.4	Mittelwertsatz der Differenzialrechnung	279
8.1.5	Höhere Ableitungen	280
8.2	Ableitungstechnik	281
8.2.1	Ableitungsregeln	281
8.2.2	Ableitung der Umkehrfunktion	286
8.2.3	Logarithmisches Differenzieren	288
8.2.4	Implizites Differenzieren	289
8.2.5	Zusammenfassung	290
8.3	Regel von Bernoulli-de l'Hospital	291
8.4	Geometrische Bedeutung der Ableitungen	295
8.4.1	Neigungswinkel und Schnittwinkel	295
8.4.2	Monotonie	297
8.4.3	Krümmung	298
8.4.4	Lokale Extrema	299
8.4.5	Wendepunkte	303
8.4.6	Globale Extrema	304
8.5	Numerische Verfahren	305
8.5.1	Numerische Differenziation	306
8.5.2	Newton-Verfahren	307
8.5.3	Sekantenverfahren	309
8.6	Anwendungen	310
8.6.1	Fehlerrechnung	310
8.6.2	Extremwertaufgaben	312
8.6.3	Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit	314
8.7	Aufgaben	315
9	Integralrechnung	321
9.1	Flächenproblem	321
9.1.1	Integralsymbol	321
9.1.2	Integral als Grenzwert von Summen	322
9.1.3	Bestimmtes Integral	324
9.2	Zusammenhang von Ableitung und Integral	325
9.2.1	Integralfunktion	325
9.2.2	Stammfunktion	327
9.2.3	Bestimmtes Integral und Stammfunktion	329
9.2.4	Mittelwertsatz der Integralrechnung	330
9.3	Integrationstechnik	332
9.3.1	Integrationsregeln	332
9.3.2	Integration durch Substitution	336
9.3.3	Partielle Integration	343
9.3.4	Gebrochenrationale Funktionen	345
9.3.5	Uneigentliche Integrale	348

9.4	Länge, Flächeninhalt und Volumen	351
9.4.1	Flächeninhalte	351
9.4.2	Bogenlänge	353
9.4.3	Rotationskörper	355
9.5	Numerische Verfahren	359
9.5.1	Trapezregel	360
9.5.2	Romberg-Verfahren	362
9.6	Anwendungen	362
9.6.1	Effektivwert	362
9.6.2	Schwerpunkte und statische Momente ebener Flächen	363
9.7	Aufgaben	367
10	Potenzreihen	371
10.1	Unendliche Reihen	372
10.2	Potenzreihen und Konvergenz	376
10.3	Taylor-Reihen	377
10.4	Eigenschaften	379
10.5	Numerische Verfahren	385
10.6	Anwendungen	386
10.7	Aufgaben	387
11	Kurven	389
11.1	Parameterdarstellung	389
11.2	Kegelschnitte	392
11.3	Tangente	398
11.4	Krümmung	400
11.5	Bogenlänge	403
11.6	Numerische Verfahren	405
11.7	Anwendungen	407
11.7.1	Mechanik	407
11.7.2	Straßenbau	408
11.8	Aufgaben	410
12	Funktionen mit mehreren Variablen	413
12.1	Definition und Darstellung	413
12.1.1	Definition einer Funktion mit mehreren Variablen	413
12.1.2	Schaubild einer Funktion mit mehreren Variablen	414
12.1.3	Schnittkurven mit Ebenen und Höhenlinien	414
12.2	Grenzwert und Stetigkeit	418
12.2.1	Grenzwert einer Funktion mit mehreren Variablen	418
12.2.2	Stetigkeit	419
12.3	Differenziation	420
12.3.1	Partielle Ableitungen und partielle Differenzierbarkeit	420
12.3.2	Differenzierbarkeit und Tangentialebene	423
12.3.3	Gradient und Richtungsableitung	425
12.3.4	Differenzial	428

12.3.5	Höhere partielle Ableitungen	431
12.3.6	Extremwerte	433
12.4	Ausgleichsrechnung	435
12.4.1	Methode der kleinsten Fehlerquadrate	435
12.4.2	Ausgleichsrechnung mit Polynomen	436
12.4.3	Lineare Ausgleichsrechnung	440
12.5	Vektorwertige Funktionen	442
12.6	Numerische Verfahren	443
12.6.1	Mehrdimensionales Newton-Verfahren	443
12.6.2	Gradientenverfahren	445
12.7	Anwendungen	447
12.8	Aufgaben	449
13	Komplexe Zahlen und Funktionen	451
13.1	Definition und Darstellung	451
13.1.1	Komplexe Zahlen	451
13.1.2	Gaußsche Zahlenebene	452
13.1.3	Polarkoordinaten	453
13.1.4	Exponentialform	455
13.2	Rechenregeln	457
13.2.1	Gleichheit	457
13.2.2	Addition und Subtraktion	457
13.2.3	Multiplikation und Division	458
13.2.4	Rechnen mit der konjugiert komplexen Zahl	460
13.2.5	Rechnen mit dem Betrag einer komplexen Zahl	460
13.3	Potenzen, Wurzeln und Polynome	462
13.3.1	Potenzen	463
13.3.2	Wurzeln	463
13.3.3	Fundamentalsatz der Algebra	466
13.4	Komplexe Funktionen	468
13.4.1	Ortskurven	469
13.4.2	Harmonische Schwingungen	470
13.4.3	Transformationen	474
13.5	Anwendungen	478
13.6	Aufgaben	479
14	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	481
14.1	Einführung	481
14.1.1	Grundbegriffe	481
14.1.2	Anfangswert- und Randwertproblem	484
14.1.3	Richtungsfeld und Orthogonaltrajektorie	486
14.1.4	Differenzialgleichung und Funktionenschar	488
14.2	Differenzialgleichungen erster Ordnung	489
14.2.1	Separation der Variablen	490
14.2.2	Lineare Substitution	492
14.2.3	Ähnlichkeitsdifferenzialgleichungen	493

14.3	Lineare Differenzialgleichungen	494
14.3.1	Homogene und inhomogene lineare Differenzialgleichungen	494
14.3.2	Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	497
14.3.3	Allgemeine Eigenschaften	501
14.3.4	Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	504
14.4	Schwingungsdifferenzialgleichungen	517
14.4.1	Allgemeine Form	517
14.4.2	Freie Schwingung	518
14.4.3	Harmonisch angeregte Schwingung	520
14.4.4	Frequenzgänge	524
14.5	Differenzialgleichungssysteme	526
14.5.1	Eliminationsverfahren	526
14.5.2	Zustandsvariablen	528
14.5.3	Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	530
14.5.4	Lineare Differenzialgleichung als System	536
14.5.5	Stabilität	538
14.6	Numerische Verfahren	542
14.6.1	Polygonzugverfahren von Euler	542
14.6.2	Euler-Verfahren für Differenzialgleichungssysteme	544
14.7	Anwendungen	545
14.7.1	Temperaturverlauf	545
14.7.2	Radioaktiver Zerfall	545
14.7.3	Freier Fall mit Luftwiderstand	546
14.7.4	Feder-Masse-Schwinger	547
14.7.5	Pendel	548
14.7.6	Wechselstromkreise	548
14.8	Aufgaben	551
15	Differenzengleichungen	557
15.1	Lineare Differenzengleichungen	557
15.1.1	Differenzengleichungen erster Ordnung	559
15.1.2	Differenzengleichungen höherer Ordnung	561
15.2	Systeme linearer Differenzengleichungen	565
15.2.1	Homogene Systeme erster Ordnung	566
15.2.2	Inhomogene Systeme erster Ordnung	568
15.2.3	Asymptotisches Verhalten	569
15.3	Anwendungen	571
15.4	Aufgaben	572
16	Fourier-Reihen	573
16.1	Fourier-Analyse	573
16.1.1	Periodische Funktionen	573
16.1.2	Trigonometrische Polynome	575
16.1.3	Fourier-Reihe	577
16.1.4	Satz von Fourier	578
16.1.5	Gibbssches Phänomen	581

16.2	Komplexe Darstellung	583
16.2.1	Komplexe Fourier-Reihe	583
16.2.2	Berechnung komplexer Fourier-Koeffizienten	585
16.2.3	Spektrum	587
16.2.4	Minimaleigenschaft	590
16.3	Eigenschaften	592
16.3.1	Symmetrie	592
16.3.2	Integrationsintervall	593
16.3.3	Mittelwert	594
16.3.4	Linearität	594
16.3.5	Ähnlichkeit und Zeitumkehr	596
16.3.6	Zeitverschiebung	597
16.4	Aufgaben	599
17	Verallgemeinerte Funktionen	601
17.1	Heaviside-Funktion	601
17.2	Dirac-Distribution	603
17.3	Verallgemeinerte Ableitung	605
17.4	Faltung	607
17.5	Anwendungen	611
17.6	Aufgaben	612
18	Fourier-Transformation	613
18.1	Integraltransformation	613
18.1.1	Definition	613
18.1.2	Darstellung mit Real- und Imaginärteil	615
18.1.3	Sinus- und Kosinustransformation	617
18.1.4	Transformation gerader und ungerader Funktionen	618
18.1.5	Darstellung mit Amplitude und Phase	620
18.2	Eigenschaften	621
18.2.1	Linearität	622
18.2.2	Zeitverschiebung	623
18.2.3	Amplitudenmodulation	625
18.2.4	Ähnlichkeit und Zeitumkehr	627
18.3	Inverse Fourier-Transformation	628
18.3.1	Definition	628
18.3.2	Vertauschungssatz	630
18.3.3	Linearität	631
18.4	Differenziation, Integration und Faltung	631
18.4.1	Differenziation im Zeitbereich	631
18.4.2	Differenziation im Frequenzbereich	633
18.4.3	Multiplikationssatz	633
18.4.4	Integration	634
18.4.5	Faltung	635
18.5	Periodische Funktionen	635
18.5.1	Fourier-Transformation einer Fourier-Reihe	636

18.5.2	Koeffizienten der Fourier-Reihe	636
18.5.3	Grenzwertbetrachtung	638
18.6	Anwendungen	640
18.6.1	Lineare zeitinvariante Systeme	640
18.6.2	Tiefpassfilter	642
18.7	Aufgaben	644
19	Laplace-Transformation	647
19.1	Bildbereich	647
19.1.1	Definition	647
19.1.2	Laplace- und Fourier-Transformation	650
19.2	Eigenschaften	651
19.2.1	Linearität	651
19.2.2	Ähnlichkeit	652
19.2.3	Zeitverschiebung	653
19.2.4	Dämpfung	654
19.3	Differenziation, Integration und Faltung	655
19.3.1	Differenziation	655
19.3.2	Integration	657
19.3.3	Faltung	658
19.3.4	Grenzwerte	659
19.4	Transformation periodischer Funktionen	659
19.5	Rücktransformation	661
19.6	Lösung gewöhnlicher Differenzialgleichungen	662
19.7	Anwendungen	668
19.8	Aufgaben	671
20	z-Transformation	673
20.1	Transformation diskreter Signale	673
20.1.1	Definition	673
20.1.2	z-Transformation und Laplace-Transformation	675
20.2	Eigenschaften	676
20.2.1	Linearität	676
20.2.2	Dämpfung	677
20.2.3	Verschiebung	677
20.2.4	Vorwärtsdifferenzen	678
20.2.5	Multiplikationssatz	679
20.2.6	Diskrete Faltung	680
20.3	Lösung von Differenzgleichungen	682
20.4	Anwendungen	685
20.5	Aufgaben	687
21	Elementare Zahlentheorie	689
21.1	Teilbarkeit	689
21.2	Kongruente Zahlen	693
21.3	Primzahlen	698

21.4 Anwendungen	702
21.4.1 International Bank Account Number (IBAN)	702
21.4.2 Linearer Kongruenzgenerator für Pseudozufallszahlen	703
21.5 Aufgaben	704

A Anhang **705**

A.1 Bedeutende Mathematiker	705
A.2 Trigonometrische Funktionen	724
A.3 Ableitungen	725
A.4 Ableitungsregeln	725
A.5 Integrale	726
A.6 Integralregeln	727
A.7 Potenzreihen	727
A.8 Fourier-Reihen	728
A.9 Korrespondenzen der Fourier-Transformation	730
A.10 Eigenschaften der Fourier-Transformation	732
A.11 Korrespondenzen der Laplace-Transformation	733
A.12 Eigenschaften der Laplace-Transformation	734
A.13 Korrespondenzen der z-Transformationen	735
A.14 Eigenschaften der z-Transformationen	735
A.15 Griechisches Alphabet	736

Literaturverzeichnis **737**

Sachwortverzeichnis **739**