

Tilo Arens Rolf Busam Frank Hettlich Christian Karpfinger Hellmuth Stachel

Grundwissen Mathematikstudium

Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen

mit Beiträgen von Klaus Lichtenegger

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V	5.3 Das Lösungskriterium und die Struktur der Lösung	180
1 Mathematik-eine Wissenschaft für sich	1	Zusammenfassung	185
1.1 Über Mathematik, Mathematiker und dieses Lehrbuch	2	Aufgaben	186
1.2 Die didaktischen Elemente dieses Buchs	8	6 Vektorräume – von Basen und Dimensionen	189
1.3 Ratschläge zum Einstieg in die Mathematik	10	6.1 Der Vektorraumbegriff	190
1.4 Eine kurze Geschichte der Mathematik ...	13	6.2 Beispiele von Vektorräumen	193
2 Logik, Mengen, Abbildungen – die Sprache der Mathematik	27	6.3 Untervektorräume	196
2.1 Junktoren und Quantoren	28	6.4 Basis und Dimension	198
2.2 Grundbegriffe aus der Mengenlehre	34	6.5 Summe und Durchschnitt von Untervektorräumen	211
2.3 Abbildungen	40	Zusammenfassung	222
2.4 Relationen	49	Aufgaben	223
Zusammenfassung	58	7 Analytische Geometrie – Rechnen statt Zeichnen	227
Aufgaben	60	7.1 Punkte und Vektoren im Anschauungsraum	228
3 Algebraische Strukturen – ein Blick hinter die Rechenregeln	63	7.2 Das Skalarprodukt im Anschauungsraum	232
3.1 Gruppen	64	7.3 Weitere Produkte von Vektoren im Anschauungsraum	238
3.2 Homomorphismen	71	7.4 Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen	247
3.3 Körper	78	7.5 Wechsel zwischen kartesischen Koordinatensystemen	257
3.4 Ringe	85	Zusammenfassung	268
Zusammenfassung	95	Aufgaben	270
Aufgaben	97	8 Folgen – der Weg ins Unendliche	275
4 Zahlbereiche – Basis der gesamten Mathematik	101	8.1 Der Begriff einer Folge	276
4.1 Der Körper der reellen Zahlen	102	8.2 Konvergenz	283
4.2 Anordnungsaxiome für die reellen Zahlen	106	8.3 Häufungspunkte und Cauchy-Folgen	291
4.3 Ein Vollständigkeitsaxiom	114	Zusammenfassung	299
4.4 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion	117	Aufgaben	300
4.5 Ganze Zahlen und rationale Zahlen	127	9 Funktionen und Stetigkeit – e trifft auf S	303
4.6 Komplexe Zahlen	134	9.1 Grundlegendes zu Funktionen	304
4.7 Vertiefung: Konstruktiver Aufbau der reellen Zahlen	148	9.2 Beschränkte und monotone Funktionen	310
Zusammenfassung	155	9.3 Grenzwerte für Funktionen und die Stetigkeit	313
Aufgaben	156	9.4 Abgeschlossene, offene, kompakte Mengen	322
5 Lineare Gleichungssysteme – ein Tor zur linearen Algebra	165	9.5 Stetige Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich, Zwischenwertsatz	330
5.1 Erste Lösungsversuche	166	Zusammenfassung	341
5.2 Das Lösungsverfahren von Gauß und Jordan	172	Aufgaben	342

10 Reihen – Summieren bis zum Letzten .	347	14.8 Die Berechnung einer Jordan-Normalform und Jordan-Basis	53;
10.1 Motivation und Definition	348	Zusammenfassung	54 ^A
10.2 Kriterien für Konvergenz	355	Aufgaben	54(
10.3 Absolute Konvergenz	363		
10.4 Kriterien für absolute Konvergenz	368	15 Differenzialrechnung –	
Zusammenfassung	376	die Linearisierung von Funktionen – . . .	551
Aufgaben	377	15.1 Die Ableitung	55i
11 Potenzreihen – Alleskönner unter den Funktionen	381	15.2 Differenziationsregeln	56C
11.1 Definition und Grundlagen	382	15.3 Der Mittelwertsatz	56\$
11.2 Die Darstellung von Funktionen durch Potenzreihen	389	15.4 Verhalten differenzierbarer Funktionen . . .	57/
11.3 Die Exponentialfunktion	398	15.5 Taylorreihen	583
11.4 Trigonometrische Funktionen	403	Zusammenfassung	593
11.5 Der Logarithmus	409	Aufgaben	594
Zusammenfassung	413	16 Integrale – von lokal zu global	599
Aufgaben	414	16.1 Integration von Treppenfunktionen	600
12 Lineare Abbildungen und Matrizen – Brücken zwischen Vektorräumen	417	16.2 Das Lebesgue-Integral	604
12.1 Definition und Beispiele	418	16.3 Stammfunktionen	613
12.2 Verknüpfungen von linearen Abbildungen	422	16.4 Integrationstechniken	618
12.3 Kern, Bild und die Dimensionsformel	425	16.5 Integration über unbeschränkte Intervalle oder Funktionen	622
12.4 Darstellungsmatrizen	432	16.6 Parameterabhängige Integrale	633
12.5 Das Produkt von Matrizen	442	16.7 Weitere Integrationsbegriffe	637
12.6 Das Invertieren von Matrizen	446	Zusammenfassung	649
12.7 Elementarmatrizen	451	Aufgaben	650
12.8 Basistransformation	455	17 Euklidische und unitäre Vektorräume –	
12.9 Der Dualraum	458	orthogonales Diagonalisieren	655
Zusammenfassung	462	17.1 Euklidische Vektorräume	656
Aufgaben	464	17.2 Norm, Abstand, Winkel, Orthogonalität . .	662
13 Determinanten – Kenngrößen von Matrizen	469	17.3 Orthonormalbasen und orthogonale Komplemente	668
13.1 Die Definition der Determinante	470	17.4 Unitäre Vektorräume	678
13.2 Determinanten von Endomorphismen	475	17.5 Orthogonale und unitäre Endomorphismen	681
13.3 Berechnung der Determinante	476	17.6 Selbstadjungierte Endomorphismen	691
13.4 Anwendungen der Determinante	483	17.7 Normale Endomorphismen	697
Zusammenfassung	492	Zusammenfassung	705
Aufgaben	494	Aufgaben	708
14 Normalformen – Diagonalisieren und Triangulieren	497	18 Quadriken – vielseitig nutzbare Punktmengen	713
14.1 Diagonalisierbarkeit	498	18.1 Symmetrische Bilinearformen	714
14.2 Eigenwerte und Eigenvektoren	501	18.2 Hermitesche Sesquilinearformen	724
14.3 Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren	503	18.3 Quadriken und ihre Hauptachsen- transformation	728
14.4 Algebraische und geometrische Vielfachheit	510	18.4 Die Singulärwertzerlegung	741
14.5 Die Exponentialfunktion für Matrizen	519	18.5 Die Pseudoinverse einer linearen Abbildung	743
14.6 Das Triangulieren von Endomorphismen . .	521	Zusammenfassung	753
14.7 Die Jordan-Normalform	526	Aufgaben	754

19	Metrische Räume – Zusammenspiel von Analysis und lineare Algebra —	759	23	Vektoranalysis – im Zentrum steht der Gauß'sche Satz	951
19.1	Metrische Räume und ihre Topologie —	760	23.1	Kurven im \mathbb{R}^n	952
19.2	Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen	768	23.2	Das Kurvenintegral	960
19.3	Kompaktheit	783	23.3	Flächen und Flächenintegrale	968
19.4	Zusammenhangsbegriffe	792	23.4	Der Gauß'sche Satz Zusammenfassung	980 1002
19.5	Vollständigkeit	797		Aufgaben	1003
19.6	Banach- und Hilberträume Zusammenfassung Aufgaben	803 817 819	24	Optimierung – aber mit Nebenbedingungen	1007
20	Differenzialgleichungen – Funktionen sind gesucht	823	24.1	Lineare Optimierung	1008
20.1	Begriffsbildungen	824	24.2	Das Simplex-Verfahren	1017
20.2	Elementare analytische Techniken	833	24.3	Dualitätstheorie	1026
20.3	Existenz und Eindeutigkeit	841	24.4	Differenzierbare Probleme Zusammenfassung Aufgaben	1035 1042 1043
20.4	Grundlegende numerische Verfahren Zusammenfassung Aufgaben	848 854 855	25	Elementare Zahlentheorie – Teiler und Vielfache	1047
21	Funktionen mehrerer Variablen – Differenzieren im Raum	859	25.1	Teilbarkeit	1048
21.1	Einführung	860	25.2	Der euklidische Algorithmus	1049
21.2	Differenzierbarkeitsbegriffe: Totale und partielle Differenzierbarkeit ---	861	25.3	Der Fundamentalsatz der Arithmetik	1053
21.3	Differenzierungsregeln	875	25.4	ggT und kgV	1054
21.4	Mittelwertsätze und Schrankensätze	883	25.5	Zahlentheoretische Funktionen	1057
21.5	Höhere partielle Ableitungen und der Vertauschungssatz von H. A. Schwarz ---	885	25.6	Rechnen mit Kongruenzen Zusammenfassung Aufgaben	1063 1070 1071
21.6	Taylor-Formel und lokale Extrema	889	26	Elemente der diskreten Mathematik – die Kunst des Zählens	1075
21.7	Der lokale Umkehrsatz	895	26.1	Einführung in die Graphentheorie	1076
21.8	Der Satz über implizite Funktionen Zusammenfassung Aufgaben	901 905 908	26.2	Einführung in die Kombinatorik	1090
22	Gebietsintegrale – das Ausmessen von Mengen	913	26.3	Erzeugende Funktionen Zusammenfassung Aufgaben	1097 1101 1103
22.1	Definition und Eigenschaften	914		Hinweise zu den Aufgaben	1107
22.2	Die Berechnung von Gebietsintegralen ---	922		Lösungen zu den Aufgaben	1125
22.3	Die Transformationsformel	931		Bildnachweis	1141
22.4	Wichtige Koordinatensysteme Zusammenfassung Aufgaben	937 945 946		Symbolglossar deutsch/englisch	1143
				Index	1161