Peter Steinke

Finite-Elemente-Methode

Rechnergestützte Einführung

3., neu bearbeitete Auflage

Springer

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Vorgehensweise bei der FEM . . . 3
1.2 Verschiedene Elementtypen . . . 5
1.3 Beispiele zur. Finite-Elemente-Methode . . . 10
1.3.1 • Beispiel zu nichtlinearen Problemen . . . 10
1.3.2 Beispiele zur Optimierung . . . 11

2 Mathematische Grundlagen

2.1 Schreibweisen . . . 19
2.2 Vektoren . . . 20
2.2.1 Definition eines *n* dimensionalen Vektors . . . 20
2.2.2 Skalarprodukt . . . 20
2.2.3 Kreuzprodukt . . . 20
2.2.4 Ableitung von Vektoren . . . 21
2.2.5 Der Nabla-Vektor . . . 22
2.2.6 Der Gradientenvektor . . . 22
2.2.7 Divergenz und Laplace-Operator . . . 23
2.3 Matrizen . . . 23
2.3.1 Definition einer Matrix . . . 23
2.3.2 Rechenregeln . . . 24
2.3.3 Transponierte Matrix . . . 26
2.3.4 Orthogonale Matrix . . . 27
2.4 Die Dyade (Tensor zweiter Stufe) . . . 27
2.4.1 Differentialoperator . . . 28
2.4.2 Tensor höherer Stufe . . . 28
2.5 Felder . . . ^ . 28
2.5.1 Skalarfelder . . . 28
2.5.2 Das Vektorfeld als Gradient des Skalarfeldes . . . 29
2.5.3 Das dyadische Feld . . . 29
2.6 Lineare Transformation . . . 32
2.6.1 Transformation eines Vektors . . . 32
2.6.2 Transformation einer Dyade (Tensor zweiter Stufe) . . . 34
2.6.3 Beispiele zur Transformation . . . 34
2.7 Funktionale . . . 36
2.7.1 Diskretisierung des Funktionais . . . 38
2.8 Dreieckskoordinaten . . . 39
2.8.1 Ableitungen in Dreieckskoordinaten (Jakobi-Matrix) . . . 41
2.8.2 Integration in Dreieckskoordinaten . . . 44
2.9 Numerische Integration (Quadratur) . . . 45
2.9.1 Numerische Integration für eindimensionale Probleme ... 45

2.9.2 Numerische Integration in Dreieckskoordinaten 47
2.10 Lineare Gleichungssysteme bei der FEM **48**
2.10.1 Definition der Bandbreite **49**
2.10.2 Rechenzeiten zur Lösung linearer Gleichungssysteme **49**
2.10.3 Positiv definite Matrix **50**
2.10.4 Das Verfahren von Cholesky **51**
2.**10.**5 Kondition linearer Gleichungssysteme **53**
2.10.6 Zwangsbedingungen bei linearen Gleichungssystemen **56**
2.11 Näherungsfehler bei der FEM 57
2.12 Das Tonti-Diagramm **58**

3 Beschreibung elastostatischer Probleme
3.1 Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie **61**
3.1.1 Verknüpfung der Verschiebungen mit den Dehnungen ... **61**
3.1.2 Das Stoffgesetz 62
3.1.3 Gleichgewichtsbedingungen **62**
3.1.4 Randbedingungen **62**
3.1.5 Das Tonti-Diagramm des elastostatischen Problems 63
3.1.6 Verknüpfung der Grundgleichungen der Elastostatik **64**
3.2 Das Prinzip virtueller Verrückungen **65**
3.2.1 Das Prinzip vom Gesamtpotential **65**

4 Das Verfahren von Ritz
4.1 Aufprägen der wesentlichen Randbedingungen 72
4.1.1 Beispiel zu den wesentlichen Randbedingungen 73
4.2 Eindimensionale Stabprobleme 75
4.2.1 Diskretisierung der Formänderungsarbeit 75
4.2.2 Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten . . . . >-... 76
4.2.3 Beispiel zum eindimensionalen Stab 77
4.3 Eindimensionale Balkenprobleme 79
4.3.1 Diskretisierung der Formänderungsarbeit 79
4.3.2 Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten 79
4.3.3 Variation des Gesamtpotentials 80
4.4 Scheibenproblem 84
4.4.1 Verschiebungsansätze....? 85
4.4.2 Wesentliche Randbedingungen 85
4.4.3 Dehnungen und Spannungen der Scheibe 86
4.4.4 Diskretisierung der Formänderungsarbeit 87
4.4.5 Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten 88
4.4.6 Variation des Gesamtpotentials 89
4.4.7 Kragbalken als Scheibenproblem 89

5 Stabelemente
5.1 Das eindimensionale Stabelement ... 95
5.1.1 Problemdefinition ... **95**
5.1.2 Das Tonti-Diagramm des Stabes ... 95
5.1.3 Das Funktional des Stabproblemes ... **98**
5.1.4 Diskretisierung des Funktionais des Stabes ... **98**
5.1.5 Variation des Funktionais ... **101**
5.1.6 Beispiel zum eindimensionalen Stab ... **103**
5.1.7 Direkte Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix ... **109**
5.1.8 Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix (allgemein) ... **111**
5.1.9 Übungsbeispiele zum eindimensionalen Stab ... **113**
5.1.10 Variable Querschnittsfläche des Stabelementes ... **115**
5.1.11 Eindimensionales Stabelement mit *n* Knoten ... **116**
5.1.12 Eindimensionaler Stab mit drei bzw. vier Knoten ... **119**
5.2 Das zwei-und dreidimensionale Stabelement ... **120**
5.2.1 Das zweidimensionale Stabelement ... **120**
5.2.2 Beispiel zum zweidimensionalen Stabproblem ... **123**
5.2.3 Optimierung eines Stabtragwerkes ... **128**
5.2.4 Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Stab ... **131**
5.2.5 Das dreidimensionale Stabelement ... **134**

6 Balkenelemente
6.1 Das eindimensionale Balkenelement ... **139**
6.1.1 Problemdefinition ... **139**
6.1.2 Dehnungen und Spannungen im Balken ... **140**
6.1.3 Das Tonti-Diagramm des Bernoulli-Balkens ... **141**
6.1.4 Funktional des Balkenproblems ... **142**
6.1.5 Formfunktionen des eindimensionalen Balkens ... 143
6.1.6 Diskretisierung des Funktionais ... **145**
6.1.7 Variation des diskretisierten Funktionais ... **147**
6.1.8 Bilden der Steifigkeit'smatrix ... **148**
6.1.9 Diskretisierung der Streckenlast ... **149**
6.1.10 Schnittgrößen des Balkenelementes ... **151**
6.2 Beispiel zum eindimensionalen Balken ... **153**
6.2.1 Zweiseitig gelagerter Balken mit Streckenlast ... 153
6.2.2 Konvergenztest beim zweiknotigen Balkenelement ... 157
6.2.3 Realisierung des Gelenkes über eine Zwangsbedingung ... **159**
6.3 Übungsbeispiele zum Bernoulli-Balken ... **161**
6.4 Balkenelement mit *n* Knoten und *p* Freiheitsgraden pro Knoten ... **164**
6.4.1 Das eindimensionale Balkenelement mit drei Knoten ... **167**

6.5 Das eindimensionale Balkenelement mit drei Freiheitsgraden pro Knoten 171
6.5.1 Balken mit unstetiger Krümmungsverteilung 174
6.6 Der Timoshenko-Balken 175
6.6.1 Schnittgrößen beim Timoshenko-Balken 181
6.6.2 „Locking-Effect" 182
6.6.3 Übungsbeispiele zum Timoshenko-Balken 184
6.7 Der elastisch gelagerte Balken 185
6.7.1 Beispiel zum elastisch gelagerten Balken 187
6.8 Zweidimensionales Balkenelement 192
6.8.1 Freiheitsgrade des zweidimensionalen Balkens 192
6.8.2 Überlagerung der Dehnungen von Stab und Balken 192
6.8.3 Steifigkeitsmatrix 193
6.8.4 Transformation der Steifigkeitsmatrix 195
6.9 Beispiel und Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Balken 198
6.9.1 Winkelproblem 198
6.9.2 Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Balken 204

7 Scheibenproblem
7.1 Problemdefinition 209
7.2 Die Grundgleichungen des Scheibenproblems 210
7.2.1 Die Feldgleichungen der Scheibe 211
7.3 Das Funktional des Scheibenproblems 212
7.4 Diskretisierung des Funktionais 213
7.4.1 Formfunktionen des Dreieckselementes 213
7.4.2 Variation des diskretisierten Funktionais 217
7.4.3 Diskretisierung der Volumenkräfte 219
7.4.4 Diskretisierung der Streckenlasten 222
7.4.5 Spannungen in der Scheibe 225
7.5 Beispiele zum Scheibenproblem 225
7.6 Übungsbeispiele zur Scheibe 232

8 Platten- und Schalenelemente
8.1 Problemdefinition 237
8.2 Grundbeziehungen der Platte 237
8.2.1 Voraussetzungen bei der Kirchhoff-Platte 237
8.2.2 Kinematische Größen der Platte 239
8.2.3 Krümmungs-Momenten-Beziehung (Stoffgleichung) 240
8.2.4 Gleichgewichtsbeziehungen der Platte 242
8.2.5 Randbedingungen der Platte 242
8.3 Das Funktional der Platte 243

8.4 Anforderungen an das Plattenelement ... 245
8.4.1 Kompatibilität (konforme Elemente) ... **245**
8.4.2 Starrkörperbewegung ... **246**
8.4.3 Konstanter Dehnungszustand (Verzerrungszustand) ... **247**
8.4.4 Einige Dreiecksplattenelemente ... **247**
8.5 Diskretisierung des Funktionais ... **249**
8.5.1 Ansatzfunktion für die Durchbiegung ... **249**
8.5.2 Interpolationsbedingungen ... **250**
8.5.3 Formfunktionen ... **253**
8.5.4 Krümmungs-Verschiebungs- Beziehung ... **253**
8.5.5 Steifigkeitsmatrix ... **254** •
8.5.6 Flächenlast ... **255**
8.5.7 Streckenlast entlang einer Elementkante ... **256**
8.6 Konvergenztest des Plattenelementes ... **257** •
8.7 Schalenelement ... **258**

9 Feldprobleme
9.1 Wärmeübertragung ... **269**
9.1.1 Die Poisson'sche Gleichung ... **269**
9.1.2 Randbedingungen ... **269**
9.1.3 Das Funktional der Wärmeübertragung ... **270**
9.2 Eindimensionale Wärmeübertragung ... **271**
9.2.1 Problemdefinition ... **271**
9.2.2 Funktional des eindimensionalen Wärmeübertragungsproblems ... **271**
9.2.3 Diskretisierung des Funktionais ... **272**
9.2.4 Variation des Funktionais ... **276**
9.2.5 Beispiel zur eindimensionalen Wärmeübertragung ... T--277
9.2.6 Übungsbeispiele: Eindimensionale Wärmeübertragung ... **282**
9.3 Zweidimensionale Wärmeübertragung ... **284**
9.3.1 Problemdefinition ... **284**
9.3.2 Randbedingungen bei der zweidimensionalen Wärmeübertragung ... **284**
9.3.3 Diskretisierung des Funktionais ... **285**
9.3.4 Variation des Funktionais ... **292**
9.3.5 Beispiel zur zweidimensionalen Wärmeübertragung ... **294**
9.3.6 Übungsbeispiele zur zweidimensionalen Wärmeübertragung **299**
9.4 Torsion von prismatischen Körpern ... **302**
9.4.1 Funktional des Torsionsproblems ... **305**
9.5 Analogie - Wärmeübertragung zu Schichtenströmung ... **308**
9.5.1 Problembeschreibung ... **308**

9.5.2 Grundgleichungen 308
9.5.3 Analogie der Randbedingungen 310
9.5.4 Analoges Funktional des Strömungsproblems 311

10 Eigenfrequenzen und Schwingungsformen von Stäben und Balken

10.1 Der eindimensionale Stab **315**
10.1.1 Massenmatrix des eindimensionalen Stabes **316**
10.1.2 Eigenfrequenzen und Schwingungsformen **316**
10.2 Beispiele zum eindimensionalen Stab **318**
10.2.1 Einmassenschwinger **318**
10.2.2 Zweimassenschwinger **319**
10.3 Der eindimensionale Balken **322**
10.3.1 Massenmatrix des eindimensionalen Balkens **322**
10.4 Beispiele zum eindimensionalen Balken **323**
10.4.1 Beidseitig gelenkig gelagerte Balken **324**
10.4.2 Kragbalken **326**
10.4.3 Übungsbeispiel zur Balkenschwingung **328**

11 IMichtlineare Probleme

11.1 Große Verformungen **333**
11.1.1 Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung **333**
11.1.2 Dehnungen für Stab und Balken **334**
11.1.3 Stab mit großen Verformungen **334**
11.1.4 Balken mit großen Verformungen **337**
11.2 Knicken von Stäben und Balken **341**
11.2.1 Beispiel zum Stabknicken **343**
11.2.2 Knickbeispiel I (Stab) **346**
11.2.3 Beispiel zum Knicken von Balken **346**
11.2.4 Die vier Eulerfälle **349**
11.2.5 Knickbeispiel II (Balken) **350**
11.2.6 Knickbeispiel III (Dreiknotiges Balkenelement) **350**

12 CALLJor.FEM

12.1 Übersicht über CALLJor_FEM **355**
12.1.1 Installation von CALLJor.FEM auf dem Rechner **356**
12.1.2 Updates zu CALLJor.FEM **356**
12.1.3 Lösungen zu den Übungsbeispielen **356**
12.1.4 Hinweise auf die Lernsoftware durch Icons **357**
12.1.5 Video-Tutorials als Lernmittel **358**
12.1.6 FE-Programme ohne MAPLE nutzbar **358**
12.1.7 FEMXAS über den CALL_for_FEM-Server nutzbar **360**

12.1.8 Weitere Lernsoftware zur Unterstützung des Buches. 361
12.2 Weitere Programmbeschreibungen 363
12.2.1 Das Programm InterFEM 363
12.2.2 Das Verfahren von Ritz für den eindimensionalen Stab (Ritz_Stab) 363
12.2.3 Das Verfahren von Ritz für den Balken (Ritz_Balken).... 365
12.2.4 • Das Verfahren von Ritz für die Scheibe (Ritz_Scheibe) .. 367
12.2.5 Eindimensionales Stabelement (Stab.lD) 369
12.2.6 Eindimensionales Balkenelement (BalkenJ.D) 371
12.2.7 Timoshenko-Balken 372
12.2.8 Dreiecksscheibenelement (Scheibe-Dreieck) 373
12.2.9 Plattenelement (Platte) 374
12.2.10 Knicken eines eindimensionalen Balkens (Knicken_Balken) 374
12.2.11 Eigenfrequenzen und Schwingungsform des Balkens (Dynamik.Balken) 376
12.2.12 Eindimensionale Feldprobleme (Feldprobleme_lD) 377
12.2.13 Zweidimensionale Feldprobleme (Feldprob!eme_2D) 377

13 Beispiele zu den Programmen
13.1 Rahmen durch Federn gestützt 381
13.2 Scheibe gestützt durch eine Feder 382
13.3 Wärmeübertragung (Torsion) eines gleichseitigen Dreiecks (Quadrates) 384

Verwendete Formelzeichen und Symbole 389

Literatur 399

Sachverzeichnis . . . . ^ 403

Programme 411

Peter Steinke

Finite-Elemente-Methode

Rechnergestützte Einführung

3., neu bearbeitete Auflage

Springer