

Klaus Knothe · Heribert Wessels

Finite Elemente

Eine Einführung für Ingenieure

5. Auflage

Springer Vieweg

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Beispiele aus Konstruktionsberechnung und Mechanik	1
1.2	Einordnung einer Finite-Elemente-Rechnung	5
1.3	Finite-Elemente-Verfahren für allgemeine Feldprobleme	7
1.4	Die Finite-Elemente-Methode und andere Diskretisierungsverfahren	9
1.5	Zur historischen Entwicklung der Finite-Elemente-Methode ...	12
1.6	Einführungsliteratur und Simulationsprogramme	18
1.7	Gliederung des Buches	19
2	Differentialgleichungsformulierungen für Probleme der Strukturmechanik	23
2.1	Tragwerkstypen	23
2.2	Grundgleichungen und Randbedingungen für Scheibe und Stab	25
2.2.1	Zustandsgrößen für Scheibe und Stab	26
2.2.2	Gleichgewichtsbedingungen	26
2.2.3	Materialgesetz (Elastizitätsgesetz)	28
2.2.4	Kinematische Aussagen	29
2.2.5	Verschiebungsdifferentialgleichungen	29
2.2.6	Randbedingungen	30
2.2.7	Zusammenfassung und Erweiterung auf dreidimensionale Kontinua	34
2.3	Zustandsgrößen von Balken und Platten	36
2.4	Grundgleichungen für Balken und Platten	36
2.5	Übungsaufgaben	42
3	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen	51
3.1	Was ist das Prinzip der virtuellen Verrückungen?	51
3.2	Ableitung des Prinzips der virtuellen Verrückungen	56
3.3	Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie	60
3.4	Zulässige Verschiebungszustände	64
3.5	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für einzelne Kontinua	66
3.5.1	Das Prinzip für dreidimensionale Kontinua, Scheiben und Dehnstäbe	66
3.5.2	Das Prinzip für Balken und Platten	66
3.6	Übertragung des Prinzips auf die Wärmeleitungsaufgabe	70
3.6.1	Grundgleichungen der Wärmeleitung	71

3.6.2	Das Prinzip der virtuellen Temperatur	74
3.6.3	Analogie zwischen den Grundgleichungen der Wärmeleitung und den Grundgleichungen der Strukturmechanik	75
3.7	Übungsaufgaben	77
4	Finite-Elemente-Verfahren für Scheibentragwerke und Fachwerke	87
4.1	Ein Finite-Elemente-Verfahren für Scheibentragwerke	87
4.1.1	Vorbemerkung: Globale oder lokal begrenzte Ansätze	88
4.1.2	Verschiebungsansatz für ein Rechteckelement	89
4.1.3	Stetigkeit des Verschiebungsansatzes	92
4.1.4	Diskretisierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen durch Einführung des Verschiebungsansatzes	95
4.1.5	Ermittlung der Steifigkeitsmatrix und der Lastvektoren für Rechteckelemente	97
4.1.6	Aufbau und Lösen des Gleichungssystems	104
4.1.7	Berechnung der Schnittkräfte und der Formänderungsenergie	109
4.1.8	Anschauliche Interpretation	110
4.1.9	Zusammenfassung	115
4.1.10	Einfache Beispielrechnung	119
4.1.11	Verbesserte Schnittkraftberechnung	128
4.2	Mechanisch begründete Anforderungen an ein Finite-Elemente-Verfahren	132
4.2.1	Stetigkeit des Verschiebungsansatzes	133
4.2.2	Darstellbarkeit von Starrkörperverschiebungszuständen	135
4.2.3	Darstellbarkeit konstanter Verzerrungszustände	137
4.2.4	Symmetrie der Steifigkeitsmatrix	140
4.2.5	Positive Definitheit der Steifigkeitsmatrix	141
4.2.6	Kriterien für die Wahl von Ansatzfunktionen	143
4.2.7	Überprüfung der Matrizen des 4-Knoten-Rechteckelementes	144
4.3	Ein Verfahren der finiten Elemente für Fachwerke	147
4.3.1	Elementierung	148
4.3.2	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen	148
4.3.3	1. Schritt: Festlegung des Elementtyps	149
4.3.4	2. Schritt: Differentiation des Verschiebungsansatzes	150
4.3.5	3. Schritt: Auswertung der Elementintegrale	151
4.3.6	4. Schritt: Aufbau der Systemmatrizen	151
4.3.7	5. Schritt: Lösen des Gleichungssystems	153
4.3.8	6. Schritt: Berechnung der Schnittkräfte	153
4.3.9	Ermittlung des exakten Verschiebungsansatzes	154
4.3.10	Beispielrechnung	156
4.3.11	Erweiterung auf räumliche Fachwerke	157
4.4	Übungsaufgaben	159

5	Umsetzung des Verfahrens zu einem Finite-Elemente-Programm	167
5.1	Dateneingabe und Ergebnisausgabe	167
5.2	Einbau der Elementmatrizen in die Systemmatrizen	169
5.3	Einbau der Verschiebungsrandbedingungen in die Systemmatrizen	174
5.4	Direkter Aufbau der Matrizen des gefesselten Systems	177
5.5	Lösen des Gleichungssystems	178
5.6	Übungsaufgaben	186
6	Zur Klassifikation von Elementen und Ansatzfunktionen	189
6.1	Finite Elemente in der Deformationsmethode	189
6.2	Problemtypen beim Kraftgrößenverfahren	195
6.3	Übungsaufgaben	198
7	Ansatzfunktionen für Elemente vom Scheibentyp	205
7.1	Einleitung	205
7.2	Ansatzfunktionen für Rechteckelemente durch Produktbildung	206
7.3	Ansatzfunktionen für Randpunkt- und Übergangselemente. . . .	214
7.3.1	Formfunktionen für Randpunktelemente	215
7.3.2	Entwicklung der Steifigkeitsmatrix von Randpunktelementen	222
7.3.3	Formfunktionen für Übergangselemente	224
7.4	Schiefwinklige und krummlinig berandete Elemente	226
7.4.1	Einleitung	226
7.4.2	Abbildungsvorschriften zur Approximation der Elementgeometrie	228
7.4.3	Einführung des Verschiebungsansatzes	231
7.4.4	Transformation des Differeritaloperators und des Bereichsdifferentials	233
7.4.5	Aufbau von Elementmatrizen und -vektoren	235
7.4.6	Anmerkungen zur numerischen Integration und zur programmtechnischen Umsetzung	237
7.5	Ansatzfunktionen für Dreieckelemente	240
7.5.1	Dreieckskoordinaten	240
7.5.2	Formfunktionen für gradlinig berandete Dreieckelemente	242
7.5.3	Transformation des Differeritaloperators und des Flächendifferentials	245
7.5.4	Integration	246
7.5.5	Krummlinig berandete Dreieckelemente	247
7.6	Anmerkungen zu inkompatiblen Ansätzen	248
7.7	Übungsaufgaben	251
8	Numerische Probleme	257
8.1	Hinweise für den Einsatz krummlinig berandeter Elemente	257
8.1.1	Lage der Knoten	257
8.1.2	Ordnung der numerischen Integration	261

8.2	Kontrollalgorithmen für Element- und Systemsteifigkeitsmatrizen	265
8.3	Genauigkeit und Konvergenzverhalten	268
8.3.1	Definition von Begriffen	269
8.3.2	Schrankencharakter von Energiegrößen	271
8.3.3	Fehlerquellen	274
8.3.4	Ein einfacher Konvergenzbeweis	278
8.4	Richardson-Extrapolation	287
8.5	Beispielrechnungen	290
8.5.1	Scheibenstreifen unter periodischer, treppenförmiger Randschubbelastung	290
8.5.2	Kragscheibe unter Rand- und Flächenlasten	292
8.6	Einige praktische Schlussfolgerungen	296
8.7	Übungsaufgaben	299
9	Finite Elemente für Balken und Platten	303
9.1	Vorbemerkung	303
9.2	Forderungen an Balken- und Plattenelemente	305
9.3	Elemente für schubstarre Balken und Platten	308
9.3.1	Hermite-Ansätze für Balkenelemente	308
9.3.2	Ein kompatibles Plattenrechteckelement	311
9.3.3	Zwei Plattenrechteckelemente mit 12 Freiheitsgraden..	316
9.3.4	Einige Bemerkungen zu isoparametrischen Viereckelementen für schubstarre Platten	318
9.3.5	Dreieckelemente für schubstarre Platten	321
9.3.6	Schlussfolgerungen	328
9.4	Elemente für schubweiche Balken und Platten	331
9.4.1	Elemente für schubweiche Balken	331
9.4.2	Elemente für schubweiche Balken auf der Grundlage eines modifizierten Variationsprinzips	340
9.4.3	Viereckelemente für schubweiche Platten	344
9.5	Gemischt-hybride Verfahren zur Entwicklung von Steifigkeitsmatrizen	348
9.6	Verwendung von isoparametrischen Scheiben- und Volumenelementen	350
9.7	Zusammenfassender Vergleich	353
9.8	Übungsaufgaben	355
10	Theorie 2. Ordnung, Stabilität, Schwingungen	359
10.1	Vorbemerkung	359
10.2	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen nach Theorie 2. Ordnung für Balken	360
10.2.1	Nichtlineare Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen	360
10.2.2	Linearisierte Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen	364

10.3	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen nach Theorie 2. Ordnung für Platten	367
10.4	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für dynamische Probleme	368
10.5	Berücksichtigung von Dämpfung im Stoffgesetz	371
10.6	Einige numerische Ergebnisse zum Beulen und Schwingen von Platten	374
	10.6.1 Plattenbeulen	374
	10.6.2 Plattenschwingungen	378
	10.6.3 Ausnutzung der Symmetrie bei Rechnungen nach Theorie 2. Ordnung	382
10.7	Übungsaufgaben	382
11	Ein Verfahren der finiten Elemente für ebene Rahmentragwerke	389
11.1	Elementierung	390
11.2	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für statische Probleme	390
11.3	Matrizen des schubweichen Stabelementes	391
11.4	Aufbau der Systemmatrizen	392
11.5	Berechnung der Verschiebungen und der Schnittkräfte an den Elementenden	394
11.6	Zustandsgrößen im Element	396
	11.6.1 Zustandsgrößen bei einer statischen Rechnung nach Theorie 1. Ordnung	396
	11.6.2 Zustandsgrößen bei einer statischen Rechnung nach Theorie 2. Ordnung	398
11.7	Beispielrechnungen	400
11.8	Übungsaufgaben	405
12	Ein kombiniertes Verfahren für rotationssymmetrische Flächentragwerke	411
12.1	Problemdefinition	411
12.2	Voraussetzungen und Grundgedanken des Verfahrens	413
12.3	Differentialgleichungsformulierung und Prinzipformulierung . . .	414
12.4	Ausnutzung der Rotationssymmetrie	418
12.5	Numerische Integration des homogenen Differentialgleichungssystems	419
12.6	Teilinversion zur Ermittlung der Steifigkeitsmatrix	421
12.7	Ermittlung der Massenmatrix und des Belastungsvektors	423
12.8	Aufbau des Gleichungssystems	423
12.9	Einige Ergebnisse	425
12.10	Einsatzgrenzen des Verfahrens	429
12.11	Schlussfolgerungen	430
12.12	Kopplung von Finite-Elemente- und Mehrkörpersystem-Modellen	430
12.13	Übungsaufgaben	433

13	Einstieg in nichtlineare Berechnungsmethoden	437
13.1	Spannungs- und Verzerrungsmaße	438
13.2	Materialgesetz	440
13.3	Prinzip der virtuellen Verrückungen	442
13.4	Geometrie- und Verschiebungsansätze	443
13.5	Transformationen	444
13.6	Aufstellen des Gleichungssystems	446
13.7	Iterationsvorschrift	448
13.8	Elementsteifigkeitsmatrix	449
13.9	Kontrolle der Elementmatrizen	452
13.10	Ablauf des Verfahrens	454
13.11	Beispiel	459
13.12	Hinweise zu einer Berechnung mit einem elastisch-plastischen Materialmodell	461
13.12.1	Eindimensionaler Spannungszustand	461
13.12.2	Mehrdimensionaler Spannungszustand	462
13.12.3	Ein elastisch-plastisches Stoffgesetz mit isotroper Verfestigung	465
13.12.4	Physikalisch nichtlineare Berechnung	468
13.13	Übungsaufgaben	470
14	Anhang	475
14.1	Einige Bemerkungen zu den Integralsätzen	475
14.1.1	Greensche Formel	475
14.1.2	Integralsatz für die Membran	477
14.1.3	Integralsatz für die Scheibe	477
14.1.4	Integralsatz für die Schubtaxre Platte	479
14.2	Grundlagen und Grundbegriffe der Variationsrechnung	480
14.2.1	Fundamentalsatz der Variationsrechnung	480
14.2.2	Variationsprinzip, Funktional, Nebenbedingungen, wesentliche Randbedingungen	481
14.2.3	Durchführung der Variation	484
14.2.4	Eulersche Differentialgleichung	486
14.2.5	Einbau von Nebenbedingungen mit Lagrangeschen Multiplikatoren	487
14.2.6	Kanonisches Variationsprinzip	491
14.2.7	Übergang zum Castiglianoschen Funktional	492
14.2.8	Einbau von Übergangsbedingungen mit Lagrangeschen Multiplikatoren: Das Funktional von Pian	493
14.2.9	Einbau von Randbedingungen mit Lagrangeschen Multiplikatoren in das diskretisierte Dirichletsche Funktional	495
14.3	Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften	497
14.3.1	Struktursymmetrie	497
14.3.2	Symmetrische und antimetrische Belastung	497
14.3.3	Behandlung einer Teilstruktur	498
14.3.4	Mehrfachsymmetrie	502
14.3.5	Zyklische Rotationssymmetrie	504

14.4	Übungsaufgaben	508
15	Lösungen der Übungsaufgaben	513
15.1	Vorbemerkungen	513
15.2	Lösungen zu Kapitel 2	513
15.3	Lösungen zu Kapitel 3	522
15.4	Lösungen zu Kapitel 4	529
15.5	Lösungen zu Kapitel 5	539
15.6	Lösungen zu Kapitel 6	545
15.7	Lösungen zu Kapitel 7	552
15.8	Lösungen zu Kapitel 8	562
15.9	Lösungen zu Kapitel 9	565
15.10	Lösungen zu Kapitel 10	570
15.11	Lösungen zu Kapitel 11	575
15.12	Lösungen zu Kapitel 12	583
15.13	Lösungen zu Kapitel 13	586
15.14	Lösungen zu Kapitel 14	595
	Symbole und Bezeichnungen	599
	Literatur	611
	Sachregister	631