

Hermann Friedrich  
Frank Pietschmann

# Numerische Methoden

Ein Lehr- und Übungsbuch

De Gruyter

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
<b>1 Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1 Aufgabenstellung	1
1.2 Matrizen und Determinanten	2
1.2.1 Matrizen	2
1.2.2 Determinanten	9
1.2.3 Quadratische Matrizen	14
1.3 Betrag und Normen	23
1.3.1 Betrag	23
1.3.2 Vektor- und Matrixnormen	23
1.4 Aufgaben	26
<b>2 Numerisches Rechnen und Fehler</b>	<b>29</b>
2.1 Fehler	29
2.1.1 Fehlerarten	29
2.1.2 Numerisch stabile und instabile Algorithmen	30
2.2 Maschinenzahlen	31
2.2.1 Zahlendarstellungen	33
2.2.2 Rundung	34
2.2.3 Unterlauf, Überlauf	35
2.3 Fehlerfortpflanzung	35
2.3.1 Maximalfehler	35
2.3.2 Fehlerquadratsumme	37
2.4 Konditionszahlen	39
2.4.1 Konditionszahlen bei Funktionen	39
2.4.2 Konditionszahlen bei linearen Gleichungssystemen	40
2.5 Aufgaben	42
<b>3 Iterationsverfahren</b>	<b>43</b>
3.1 Iterationsprobleme	43
3.1.1 Einführung	43
3.1.2 Zwischenwertsatz	44
3.1.3 Iterationsverfahren	44
3.1.4 Fixpunktsatz	47
3.2 Anschauliche Deutung des Iterationsverfahrens	53

3.3	Fehlerabschätzungen . . . . .	55
3.4	Abbruchkriterien bei Iterationsverfahren . . . . .	59
3.5	Konvergenzordnung . . . . .	60
3.6	Spezielle Iterationsverfahren . . . . .	61
3.6.1	Bisektionsmethode . . . . .	61
3.6.2	Regula falsi . . . . .	64
3.6.3	Newtonsches Iterationsverfahren . . . . .	68
3.7	Konvergenzverbesserung . . . . .	73
3.7.1	Verkleinern der Lipschitzkonstanten . . . . .	73
3.7.2	Verfahren von Aitken . . . . .	75
3.7.3	Steffensen-Verfahren . . . . .	76
3.8	Aufgaben . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b> . . . . .	<b>80</b>
4.1	Aufgabenstellung . . . . .	80
4.2	Eliminationsverfahren . . . . .	81
4.2.1	Gaußscher Algorithmus . . . . .	81
4.2.2	Pivotstrategie . . . . .	87
4.2.3	Givens- Verfahren . . . . .	89
4.2.4	Cholesky-Verfahren bei symmetrischer Koeffizientenmatrix . . . . .	95
4.2.5	Nachiteration . . . . .	99
4.2.6	Berechnung der inversen Matrix . . . . .	101
4.2.7	Abschätzung der Fehlerfortpflanzung . . . . .	104
4.3	Iterationsverfahren . . . . .	107
4.3.1	Gesamtschritt-oder Jacobi-Verfahren . . . . .	107
4.3.2	Abbruch beim Gesamtschrittverfahren . . . . .	109
4.3.3	Einzelschritt-oder Gauß-Seidel-Verfahren . . . . .	110
4.3.4	Abbruch beim Einzelschrittverfahren . . . . .	110
4.3.5	Konvergenz beim Gesamtschrittverfahren . . . . .	111
4.3.6	Konvergenz beim Einzelschrittverfahren . . . . .	113
4.3.7	Fehlerabschätzung bei Iterationsverfahren . . . . .	114
4.4	Aufgaben . . . . .	118
<b>5</b>	<b>Approximation von Funktionen</b> . . . . .	<b>122</b>
5.1	Problemstellungen . . . . .	122
5.2	Diskrete Approximation . . . . .	122
5.2.1	Die Ausgleichsgerade nach der Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	122
5.2.2	Approximation durch weitere Funktionen . . . . .	125
5.2.3	Linearisierungen . . . . .	131
5.3	Stetige Approximation . . . . .	138
5.3.1	Orthonormalsysteme . . . . .	142
5.3.2	Legendresche Polynome . . . . .	145

5.3.3	Approximation durch trigonometrische Funktionen . . . . .	148
5.3.4	Die komplexe Form der Fourier-Reihe . . . . .	156
5.4	Lokale Approximation . . . . .	162
5.4.1	Problemstellung . . . . .	162
5.4.2	Die Taylor-Entwicklung . . . . .	163
5.5	Aufgaben . . . . .	169
<b>6</b>	<b>Interpolationsprobleme</b> . . . . .	<b>173</b>
6.1	Problemstellung . . . . .	173
6.2	Polynominterpolation . . . . .	174
6.2.1	Interpolationsverfahren von Lagrange . . . . .	175
6.2.2	Der Fehler der Polynominterpolation . . . . .	178
6.2.3	Newtonsches Interpolationsverfahren . . . . .	180
6.2.4	Hermite-Interpolation . . . . .	192
6.3	Splineinterpolation . . . . .	199
6.3.1	Lineare Splines . . . . .	200
6.3.2	Quadratische Splines . . . . .	201
6.3.3	Kubische Splines . . . . .	205
6.3.4	B-Splines . . . . .	214
6.4	Interpolation mit periodischen Funktionen . . . . .	247
6.4.1	Problemstellung . . . . .	247
6.4.2	Die diskrete Fourier-Transformation . . . . .	248
6.4.3	Interpolation mit komplexen Exponentialfunktionen . . . . .	261
6.4.4	Interpolation mit trigonometrischen Funktionen . . . . .	264
6.4.5	Schnelle Fourier-Transformation . . . . .	270
6.5	Aufgaben . . . . .	284
<b>7</b>	<b>Numerische Differentiation</b> . . . . .	<b>288</b>
7.1	Vorbemerkungen . . . . .	288
7.2	Numerische Bestimmung von ersten Ableitungen . . . . .	289
7.3	Rundungsfehler . . . . .	296
7.4	Numerische Bestimmung von höheren Ableitungen . . . . .	298
7.5	Aufgaben . . . . .	299
<b>8</b>	<b>Numerische Integrationsmethoden</b> . . . . .	<b>301</b>
8.1	Aufgabenstellung . . . . .	301
8.2	Trapezformel . . . . .	302
8.2.1	Herleitung . . . . .	302
8.2.2	Abbruchbedingung bei der Trapezformel . . . . .	304
8.3	Simpsonsche Formel . . . . .	307
8.3.1	Herleitung . . . . .	307
8.3.2	Abbruchbedingung bei der Simpsonschen Formel . . . . .	311

8.4	Fehlerabschätzungen . . . . .	314
8.5	Verfahren von Romberg . . . . .	318
8.5.1	Herleitung . . . . .	318
8.5.2	Abbruchbedingung beim Romberg-Verfahren . . . . .	322
8.5.3	Fehlerabschätzung beim Romberg-Verfahren . . . . .	324
8.6	Adaptive Simpson-Quadratur . . . . .	325
8.6.1	Herleitung . . . . .	325
8.6.2	Fehlerschranke . . . . .	328
8.7	Gauß-Integration . . . . .	334
8.7.1	Vorbemerkungen . . . . .	334
8.7.2	Integration auf dem Intervall $[-1, 1]$ . . . . .	336
8.7.3	Gauß-Integration über ein beliebiges Intervall . . . . .	340
8.8	Aufgaben . . . . .	341
<b>9</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b> . . . . .	<b>343</b>
9.1	Begriffe und Beispiele . . . . .	343
9.1.1	Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	344
9.1.2	Technische und ökonomische Beispiele . . . . .	345
9.1.3	Das Verfahren von Picard-Lindelöf . . . . .	346
9.2	Taylor-Methoden . . . . .	349
9.2.1	Der Euler-Cauchy Polygonzug . . . . .	349
9.2.2	Methoden höherer Ordnung . . . . .	354
9.2.3	Fehlerschranken . . . . .	358
9.3	Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	358
9.4	Mehrschrittverfahren . . . . .	364
9.4.1	Explizite Mehrschrittverfahren . . . . .	365
9.4.2	Implizite Mehrschrittverfahren . . . . .	371
9.4.3	Prädiktor-Korrektor-Verfahren . . . . .	379
9.5	Steife Differentialgleichungen . . . . .	380
9.6	Weitere Anfangswertaufgaben . . . . .	390
9.6.1	Differentialgleichungssysteme erster Ordnung . . . . .	391
9.6.2	Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	395
9.7	Aufgaben . . . . .	397
<b>10</b>	<b>Polynome</b> . . . . .	<b>401</b>
10.1	Reelle Polynome . . . . .	401
10.1.1	Horner-Schema . . . . .	401
10.1.2	Abspaltung eines Linearfaktors . . . . .	403
10.1.3	Vollständiges Horner-Schema . . . . .	404
10.1.4	Newtonsches Näherungsverfahren . . . . .	407
10.2	Allgemeine Horner-Schemata . . . . .	409
10.2.1	m-zeiliges Horner-Schema . . . . .	409

10.2.2	Verallgemeinertes $m$ -zeiliges Horner-Schema . . . . .	413
10.2.3	Newtonsches Näherungsverfahren mit den $m$ -zeiligen Horner-Schemata . . . . .	415
10.2.4	Spezialfälle und Beispiel . . . . .	416
10.2.5	Bestimmung konjugiert-komplexer Nullstellen von Polynomfunktionen mit reellen Koeffizienten . . . . .	418
10.3	Komplexe Polynome. . . . .	420
10.3.1	Komplexes Horner-Schema . . . . .	420
10.3.2	Newtonsches Näherungsverfahren. . . . .	421
10.4	Anzahl und Lage der Nullstellen von Polynomen . . . . .	423
10.4.1	Abschätzungen zu Nullstellen bei Polynomen mit reellen Koeffizienten . . . . .	423
10.4.2	Berechnung der Anzahlen der voneinander verschiedenen Nullstellen von Polynomfunktionen. . . . .	427
10.5	Aufgaben. . . . .	435
<b>11</b>	<b>Numerische Simulation von Zufallsgrößen</b> . . . . .	<b>439</b>
11.1	Zufallsgrößen . . . . .	439
11.1.1	Charakterisierung von Zufallsgrößen . . . . .	439
11.1.2	Monte-Carlo-Methode. . . . .	440
11.1.3	Historische Entwicklung . . . . .	441
11.1.4	Zufallszahlen. . . . .	442
11.1.5	Genauigkeit der Monte-Carlo-Methode. . . . .	445
11.2	Zufallszahlengeneratoren. . . . .	447
11.2.1	Erzeugung gleichmäßig verteilter Zufallszahlen. . . . .	447
11.2.2	Erzeugung beliebig verteilter Zufallszahlen. . . . .	448
11.2.3	Erzeugung normalverteilter Zufallszahlen. . . . .	451
11.2.4	Statistische Tests. . . . .	452
11.3	Anwendungen der Monte-Carlo-Methode. . . . .	452
11.3.1	Übersicht . . . . .	452
11.3.2	Berechnung bestimmter Integrale. . . . .	453
11.3.3	Bestimmung von $n$ . . . . .	456
11.4	Aufgaben. . . . .	458
<b>A</b>	<b>Lösungen</b> . . . . .	<b>459</b>
<b>B</b>	<b>Zufallszahlentabelle</b> . . . . .	<b>505</b>
	Literaturverzeichnis . . . . .	509
	Abbildungsverzeichnis . . . . .	515
	Tabellenverzeichnis . . . . .	519
	Index . . . . .	523