

Hermann Friedrich
Frank Pietschmann

Numerische Methoden

Ein Lehr- und Übungsbuch

De Gruyter

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
1 Grundlagen	1
1.1 Aufgabenstellung	1
1.2 Matrizen und Determinanten	2
1.2.1 Matrizen	2
1.2.2 Determinanten	9
1.2.3 Quadratische Matrizen	14
1.3 Betrag und Normen	23
1.3.1 Betrag	23
1.3.2 Vektor- und Matrixnormen	23
1.4 Aufgaben	26
2 Numerisches Rechnen und Fehler	29
2.1 Fehler	29
2.1.1 Fehlerarten	29
2.1.2 Numerisch stabile und instabile Algorithmen	30
2.2 Maschinenzahlen	31
2.2.1 Zahlendarstellungen	33
2.2.2 Rundung	34
2.2.3 Unterlauf, Überlauf	35
2.3 Fehlerfortpflanzung	35
2.3.1 Maximalfehler	35
2.3.2 Fehlerquadratsumme	37
2.4 Konditionszahlen	39
2.4.1 Konditionszahlen bei Funktionen	39
2.4.2 Konditionszahlen bei linearen Gleichungssystemen	40
2.5 Aufgaben	42
3 Iterationsverfahren	43
3.1 Iterationsprobleme	43
3.1.1 Einführung	43
3.1.2 Zwischenwertsatz	44
3.1.3 Iterationsverfahren	44
3.1.4 Fixpunktsatz	47
3.2 Anschauliche Deutung des Iterationsverfahrens	53

3.3	Fehlerabschätzungen	55
3.4	Abbruchkriterien bei Iterationsverfahren	59
3.5	Konvergenzordnung	60
3.6	Spezielle Iterationsverfahren	61
3.6.1	Bisektionsmethode	61
3.6.2	Regula falsi	64
3.6.3	Newtonsches Iterationsverfahren	68
3.7	Konvergenzverbesserung	73
3.7.1	Verkleinern der Lipschitzkonstanten	73
3.7.2	Verfahren von Aitken	75
3.7.3	Steffensen-Verfahren	76
3.8	Aufgaben	77
4	Lineare Gleichungssysteme	80
4.1	Aufgabenstellung	80
4.2	Eliminationsverfahren	81
4.2.1	Gaußscher Algorithmus	81
4.2.2	Pivotstrategie	87
4.2.3	Givens- Verfahren	89
4.2.4	Cholesky-Verfahren bei symmetrischer Koeffizientenmatrix	95
4.2.5	Nachiteration	99
4.2.6	Berechnung der inversen Matrix	101
4.2.7	Abschätzung der Fehlerfortpflanzung	104
4.3	Iterationsverfahren	107
4.3.1	Gesamtschritt-oder Jacobi-Verfahren	107
4.3.2	Abbruch beim Gesamtschrittverfahren	109
4.3.3	Einzelschritt-oder Gauß-Seidel-Verfahren	110
4.3.4	Abbruch beim Einzelschrittverfahren	110
4.3.5	Konvergenz beim Gesamtschrittverfahren	111
4.3.6	Konvergenz beim Einzelschrittverfahren	113
4.3.7	Fehlerabschätzung bei Iterationsverfahren	114
4.4	Aufgaben	118
5	Approximation von Funktionen	122
5.1	Problemstellungen	122
5.2	Diskrete Approximation	122
5.2.1	Die Ausgleichsgerade nach der Methode der kleinsten Quadrate	122
5.2.2	Approximation durch weitere Funktionen	125
5.2.3	Linearisierungen	131
5.3	Stetige Approximation	138
5.3.1	Orthonormalsysteme	142
5.3.2	Legendresche Polynome	145

5.3.3	Approximation durch trigonometrische Funktionen	148
5.3.4	Die komplexe Form der Fourier-Reihe	156
5.4	Lokale Approximation	162
5.4.1	Problemstellung	162
5.4.2	Die Taylor-Entwicklung	163
5.5	Aufgaben	169
6	Interpolationsprobleme	173
6.1	Problemstellung	173
6.2	Polynominterpolation	174
6.2.1	Interpolationsverfahren von Lagrange	175
6.2.2	Der Fehler der Polynominterpolation	178
6.2.3	Newtonsches Interpolationsverfahren	180
6.2.4	Hermite-Interpolation	192
6.3	Splineinterpolation	199
6.3.1	Lineare Splines	200
6.3.2	Quadratische Splines	201
6.3.3	Kubische Splines	205
6.3.4	B-Splines	214
6.4	Interpolation mit periodischen Funktionen	247
6.4.1	Problemstellung	247
6.4.2	Die diskrete Fourier-Transformation	248
6.4.3	Interpolation mit komplexen Exponentialfunktionen	261
6.4.4	Interpolation mit trigonometrischen Funktionen	264
6.4.5	Schnelle Fourier-Transformation	270
6.5	Aufgaben	284
7	Numerische Differentiation	288
7.1	Vorbemerkungen	288
7.2	Numerische Bestimmung von ersten Ableitungen	289
7.3	Rundungsfehler	296
7.4	Numerische Bestimmung von höheren Ableitungen	298
7.5	Aufgaben	299
8	Numerische Integrationsmethoden	301
8.1	Aufgabenstellung	301
8.2	Trapezformel	302
8.2.1	Herleitung	302
8.2.2	Abbruchbedingung bei der Trapezformel	304
8.3	Simpsonsche Formel	307
8.3.1	Herleitung	307
8.3.2	Abbruchbedingung bei der Simpsonschen Formel	311

8.4	Fehlerabschätzungen	314
8.5	Verfahren von Romberg	318
8.5.1	Herleitung	318
8.5.2	Abbruchbedingung beim Romberg-Verfahren	322
8.5.3	Fehlerabschätzung beim Romberg-Verfahren	324
8.6	Adaptive Simpson-Quadratur	325
8.6.1	Herleitung	325
8.6.2	Fehlerschranke	328
8.7	Gauß-Integration	334
8.7.1	Vorbemerkungen	334
8.7.2	Integration auf dem Intervall $[-1, 1]$	336
8.7.3	Gauß-Integration über ein beliebiges Intervall	340
8.8	Aufgaben	341
9	Gewöhnliche Differentialgleichungen	343
9.1	Begriffe und Beispiele	343
9.1.1	Differentialgleichungen erster Ordnung	344
9.1.2	Technische und ökonomische Beispiele	345
9.1.3	Das Verfahren von Picard-Lindelöf	346
9.2	Taylor-Methoden	349
9.2.1	Der Euler-Cauchy Polygonzug	349
9.2.2	Methoden höherer Ordnung	354
9.2.3	Fehlerschranken	358
9.3	Runge-Kutta-Verfahren	358
9.4	Mehrschrittverfahren	364
9.4.1	Explizite Mehrschrittverfahren	365
9.4.2	Implizite Mehrschrittverfahren	371
9.4.3	Prädiktor-Korrektor-Verfahren	379
9.5	Steife Differentialgleichungen	380
9.6	Weitere Anfangswertaufgaben	390
9.6.1	Differentialgleichungssysteme erster Ordnung	391
9.6.2	Differentialgleichungen höherer Ordnung	395
9.7	Aufgaben	397
10	Polynome	401
10.1	Reelle Polynome	401
10.1.1	Horner-Schema	401
10.1.2	Abspaltung eines Linearfaktors	403
10.1.3	Vollständiges Horner-Schema	404
10.1.4	Newtonsches Näherungsverfahren	407
10.2	Allgemeine Horner-Schemata	409
10.2.1	m-zeiliges Horner-Schema	409

10.2.2	Verallgemeinertes m-zeiliges Horner-Schema	413
10.2.3	Newtonsches Näherungsverfahren mit den m-zeiligen Horner-Schemata	415
10.2.4	Spezialfälle und Beispiel	416
10.2.5	Bestimmung konjugiert-komplexer Nullstellen von Polynomfunktionen mit reellen Koeffizienten	418
10.3	Komplexe Polynome.	420
10.3.1	Komplexes Horner-Schema	420
10.3.2	Newtonsches Näherungsverfahren.	421
10.4	Anzahl und Lage der Nullstellen von Polynomen	423
10.4.1	Abschätzungen zu Nullstellen bei Polynomen mit reellen Koeffizienten	423
10.4.2	Berechnung der Anzahlen der voneinander verschiedenen Nullstellen von Polynomfunktionen.	427
10.5	Aufgaben.	435
11	Numerische Simulation von Zufallsgrößen	439
11.1	Zufallsgrößen	439
11.1.1	Charakterisierung von Zufallsgrößen	439
11.1.2	Monte-Carlo-Methode.	440
11.1.3	Historische Entwicklung	441
11.1.4	Zufallszahlen.	442
11.1.5	Genauigkeit der Monte-Carlo-Methode.	445
11.2	Zufallszahlengeneratoren.	447
11.2.1	Erzeugung gleichmäßig verteilter Zufallszahlen.	447
11.2.2	Erzeugung beliebig verteilter Zufallszahlen.	448
11.2.3	Erzeugung normalverteilter Zufallszahlen.	451
11.2.4	Statistische Tests.	452
11.3	Anwendungen der Monte-Carlo-Methode.	452
11.3.1	Übersicht	452
11.3.2	Berechnung bestimmter Integrale.	453
11.3.3	Bestimmung von n	456
11.4	Aufgaben.	458
A	Lösungen	459
B	Zufallszahlentabelle	505
	Literaturverzeichnis	509
	Abbildungsverzeichnis	515
	Tabellenverzeichnis	519
	Index	523