

# Grundlagen der Statistik

Wahrscheinlichkeitsrechnung  
und induktive Statistik

Von Prof. Dr. Jochen Schwarze



Verlag Neue Wirtschafts-Briefe · Herne/Berlin

## Inhaltsverzeichnis

<b>7.</b>	<b>Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	11
7.1	Vorbemerkungen	11
7.2	Zufallsexperimente und Ereignisse	13
	a) Zufallsexperimente	13
	b) Ereignisse und Ereignisraum	14
	c) Rechenoperationen für Ereignisse	15
7.3	Wahrscheinlichkeitsbegriff	18
	a) Axiomatische Definition nach KOLMOGOROFF	18
	b) Klassische Definition nach LAPLACE	21
	c) Statistische Definition nach von MISES	23
	d) Das Gesetz der großen Zahlen	25
	e) Geometrische Definition der Wahrscheinlichkeit	26
	f) Subjektive Wahrscheinlichkeit	27
7.4	Additionsgesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung	28
7.5	Bedingte Wahrscheinlichkeit und unabhängige Ereignisse	31
7.6	Multiplikationssätze	36
7.7	Behandlung zusammengesetzter Aufgaben	39
7.8	Das Theorem von BAYES	42
<b>8.</b>	<b>Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen</b>	47
8.1	Zufallsvariablen	47
8.2	Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsvariablen	49
8.3	Wahrscheinlichkeitsverteilungen stetiger Zufallsvariablen	53
8.4	Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen	60
	a) Erwartungswert	60
	b) Standardabweichung und Varianz	64
	c) Momente	66
8.5	Die Ungleichung von TSCHEBYSCHJEFF	67
8.6	Funktionen von Zufallsvariablen	69
	a) Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Funktion einer Zufallsvariablen	69
	b) Erwartungswert und Varianz einer Funktion von Zufallsvariablen	71
	c) Zentrierte und standardisierte Zufallsvariablen	73

8.7	Mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	73
	a) Wahrscheinlichkeits- und Dichtefunktion zweidimensionaler Zufallsvariablen . . . . .	74
	b) Marginale und bedingte Verteilungen . . . . .	76
	c) Parameter zweidimensionaler Verteilungen . . . . .	78
8.8	Abhängigkeit von Zufallsvariablen . . . . .	80
<b>9.</b>	<b>Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .</b>	<b>82</b>
9.1	Vorbemerkungen . . . . .	82
9.2	Gleichverteilung . . . . .	82
9.3	Binomialverteilung . . . . .	85
9.4	Hypergeometrische Verteilung . . . . .	90
9.5	Geometrische Verteilung . . . . .	95
9.6	POISSON-Verteilung . . . . .	96
9.7	Normalverteilung . . . . .	99
	a) Definition der Normalverteilung . . . . .	99
	b) Lineare Transformation einer Normalverteilung . . . . .	101
	c) Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten . . . . .	103
	d) Ergänzende Bemerkungen . . . . .	105
9.8	Grenzwertsätze . . . . .	106
9.9	Exponentialverteilung . . . . .	109
9.10	$\chi^2$ -Verteilung . . . . .	109
9.11	Student-Verteilung (t-Verteilung) . . . . .	111
9.12	F-Verteilung . . . . .	112
9.13	Approximation von Verteilungen . . . . .	114
<b>10.</b>	<b>Einführung in die schließende Statistik . . . . .</b>	<b>119</b>
10.1	Aufgabe und Bedeutung von Stichprobenverfahren für die Anwendung der Statistik . . . . .	119
10.2	Einige wahrscheinlichkeitstheoretische Grundgedanken des Schlusses von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit . . . . .	123
10.3	Grundgesamtheiten und einfache Zufallsstichproben . . . . .	126
10.4	Stichprobenfunktionen . . . . .	130
	a) Begriff der Stichprobenfunktion . . . . .	130
	b) Verteilung der Stichprobenfunktion $\bar{X}$ . . . . .	132
	c) Verteilung des Stichprobenanteilwertes bei einer dichotomen Grundgesamtheit . . . . .	137
	d) Die Verteilung der Stichprobenvarianz $S^2$ bei einer normalverteilten Grundgesamtheit . . . . .	139
10.5	Das Prinzip des Schlusses von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit . . . . .	140
10.6	Auswahlverfahren . . . . .	142
	a) Uneingeschränkte Zufallsauswahl . . . . .	143
	b) Systematische Auswahlverfahren . . . . .	144
	c) Geschichtete Stichproben . . . . .	146
	d) Quotenauswahl . . . . .	150
	e) Klumpenstichproben . . . . .	150
	f) Mehrstufige Stichprobenauswahl . . . . .	151
	g) Probleme bei der Stichprobenauswahl . . . . .	152

<b>11.</b>	<b>Einfache statistische Schätzverfahren</b>	154
11.1	Aufgabe von Schätzverfahren	154
11.2	Schätzfunktionen und Punktschätzung	155
	a) Schätzfunktionen	155
	b) Eigenschaften von Schätzfunktionen	156
	c) Konstruktion von Schätzfunktionen	160
	d) Kleinste-Quadrate-Schätzung	163
11.3	Begriff des Konfidenzintervalls	164
11.4	Konfidenzintervalle für den Parameter $\mu$ eines quantitativen Merkmals	167
11.5	Konfidenzintervalle für den Anteilswert $\theta$ einer dichotomen Grundgesamtheit	174
	a) Vorbemerkung	174
	b) Konfidenzintervalle für $\theta$ unter Verwendung der Normalverteilung	174
	c) Konfidenzintervalle unter Verwendung der F-Verteilung	177
11.6	Konfidenzintervall für die Varianz	178
11.7	Die Bestimmung des notwendigen Stichprobenumfangs für eine Intervallschätzung	181
<b>12.</b>	<b>Grundgedanken des statistischen Testens</b>	184
12.1	Einführung	184
12.2	Arten des Hypothesentests	188
12.3	Zusammenhang zwischen Schätz- und Testverfahren	189
12.4	Aufbau eines Parametertests	189
	a) Grundgesamtheit und Verteilungstyp	190
	b) Formulierung der Nullhypothese $H_0$	190
	c) Testgröße und deren Verteilung	195
	d) Irrtumswahrscheinlichkeit bzw. Signifikanzniveau	197
	e) Bestimmung der Annahmekennzahlen	198
	f) Testentscheidung	200
	g) Zusammenfassung	201
12.5	Operationscharakteristik und Güte von Parametertests	203
12.6	Anwendung der Operationscharakteristik für Stichprobenpläne	208
<b>13.</b>	<b>Parametertests</b>	213
13.1	Vorbemerkungen	213
13.2	Test einer Hypothese über den Mittelwert (Erwartungswert)	214
13.3	Test einer Hypothese über den Anteilswert $\theta$ einer dichotomen Grundgesamtheit	219
13.4	Test für die Varianz $\sigma^2$	225
13.5	Vergleich zweier Mittelwerte (Differenzentest)	228
13.6	Vergleich zweier Anteilswerte	231
13.7	Vergleich zweier Varianzen	233

---

<b>14. Ausgewählte weitere Testverfahren</b> . . . . .	237
14.1 Verbundene Stichproben . . . . .	237
14.2 Der Vorzeichentest . . . . .	238
14.3 Der Vorzeichen-Rang-Test . . . . .	241
14.4 Der $\chi^2$ -Anpassungstest . . . . .	245
14.5 Der $\chi^2$ -Unabhängigkeitstest . . . . .	249
14.6 Der Kolmogoroff-Smirnov-Anpassungstest . . . . .	252
<b>Anhang A: Lösungen der Übungsaufgaben</b> . . . . .	256
<b>Anhang B: Tabellen wichtiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen</b> . .	277
Erläuterungen . . . . .	277
Binomialverteilung . . . . .	278
Poissonverteilung . . . . .	286
Standardnormalverteilung . . . . .	293
F-Verteilung . . . . .	301
$\chi^2$ -Verteilung . . . . .	306
Studentverteilung . . . . .	308
<b>Anhang C: Annahmekennzahlen für Tests mit binomialverteilter     Testgröße</b> . . . . .	310
<b>Anhang D: Gleichverteilte Pseudozufallszahlen</b> . . . . .	318
<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	319
<b>Verzeichnis häufig verwendeter Symbole</b> . . . . .	321
<b>Verzeichnis wichtiger im Text enthaltener Schaubilder, Tabellen     und Diagramme</b> . . . . .	323
<b>Stichwortverzeichnis</b> . . . . .	325