

RENATUS ZIEGLER

# **DIE GESCHICHTE DER GEOMETRISCHEN MECHANIK IM 19. JAHRHUNDERT**

EINE HISTORISCH-SYSTEMATISCHE UNTERSUCHUNG  
VON MÖBIUS UND PLÜCKER  
BIS ZU KLEIN UND LINDEMANN



FRANZ STEINER VERLAG WIESBADEN GMBH  
STUTTART 1985

## Inhaltsverzeichnis

Kapitel I	Einleitung	1
Kapitel II	Die Ursprünge der geometrischen Mechanik : Gaspard Monge und die Ecole Polytechnique	5
1.	Frankreich als Zentrum mathematischer Forschung und Ausbildung an der Wende zum 19.Jh.	5
1.1	Die Gründung der Ecole Polytechnique	5
1.2	Die Entstehung mathematischer Schulen in Frankreich	5
2.	Einheit und Gegensatz von analytischer und synthetischer Methode in der Geometrie	7
3.	Zur Entwicklung der Mechanik	11
3.1	Der Siegeszug der analytischen Mechanik	11
3.2	Gegenbewegungen zur analytischen Richtung der Mechanik	12
4.	Ursprünge der geometrischen Grundbegriffe der Mechanik	15
4.1	Von Euler bis Monge	15
4.2	Louis Poinso	15
4.3	Von Poinso zu Chasles und Möbius: Die Entdeckung des Nullsystems	19
5.	Michel Chasles	21
5.1	Das Dualitätsprinzip in den mathematischen Wissenschaften	21
5.2	Chasles' Bemerkungen zur geometrischen Mechanik	21
6.	Zusammenfassende Betrachtung der Leistungen von Poinso und Chasles	24
6.1	Grundbegriffe der geometrischen Mechanik	24
6.2	Exkurs in die heute übliche Darstellung einiger Grundbegriffe der geometrischen Mechanik	25
Kapitel III	Die Begründung der geometrischen Mechanik: August Ferdinand Möbius	29
1.	Die Mathematik in Deutschland im Schatten Frankreichs und der Ecole Polytechnique	29
1.1	Die Ecole Polytechnique und die Reformierung des Unterrichtswesens in Deutschland	29
1.2	Der Übergang des Hauptstromes der Entwicklung der Geometrie von Frankreich nach Deutschland	30
2.	Möbius' Studien zur geometrischen Mechanik	32
2.1	Die Entdeckung des Nullsystems	32
2.2	"Lehrbuch der Statik"	34

2.3	"Über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen"	38
2.4	Würdigung des Schaffens von Möbius	38
3.	Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten	40
4.	Die Arbeiten von Chasles zur geometrischen Kinematik	42
5.	Die ersten Ansätze zur Liniengeometrie	43
5.1	Eine neue Eigenschaft des linearen Komplexes	43
5.2	Zur Entdeckung der Linienkoordinaten vor Plücker	43
Kapitel IV Euklidische Liniengeometrie und Mechanik: Julius Plücker		47
1.	Das Aufblühen der exakten Wissenschaften im Deutschland des 19. Jh.	47
1.1	Der Einfluß Alexander von Humboldts	47
1.2	Zur Entwicklung der synthetischen Geometrie von Poncelet bis von Staudt	48
1.3	Zur Entwicklung der analytischen Geometrie von Möbius bis Plücker	49
2.	Plückers wissenschaftliche Methode	53
2.1	Plücker als Mathematiker	53
2.2	Plücker als Experimentalphysiker	56
2.3	Plückers späte Jahre	57
3.	Plückers erste Arbeiten zur Liniengeometrie und Mechanik	59
3.1	Liniengeometrie	59
3.2	Mechanik	61
4.	"Neue Geometrie des Raumes..."	64
4.1	Euklidische Liniengeometrie	64
4.2	Kräfteysteme und lineare Komplexe	66
4.3	Geometrie des linearen Komplexes	68
4.4	Lineare Strahlenkongruenzen	71
4.5	Würdigung des Schaffens von Plücker	72
5.	Metrische Tetraederkoordinaten in der Liniengeometrie	74
6.	Geometrische Mechanik in Italien: Giuseppe Battaglini	79
Kapitel V Liniengeometrie und Mechanik: Klärung grundlegender Zusammenhänge durch Felix Klein		83
1.	Kleins frühe Beschäftigung mit der Liniengeometrie	83
2.	Projektive Liniengeometrie	84
2.1	Projektive Linienkoordinaten	84
2.2	Die linearen Gebilde der Liniengeometrie	86
2.3	Der lineare Komplex als Raumelement	89
2.4	Die allgemeine lineare Transformation der Linienkoordinaten	93

2.4.1	Vorbetrachtung	93
2.4.2	Verallgemeinerte Koordinaten	95
2.5	Die Kleinschen Fundamentalkomplexe	96
2.6	Liniengeometrie und Mechanik	98
3.	Würdigung des Schaffens von Klein	103
3.1	Kleins Beiträge zur Liniengeometrie und zur Mechanik des starren Körpers	103
3.2	Kleins mathematische Denkweise	105
4.	Zur Schraubentheorie von Robert Ball	109
5.	Die Herleitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen im Rahmen der euklidischen Liniengeometrie	111
5.1	Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers im ruhenden Bezugssystem	111
5.2	Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers im mitbewegten Bezugssystem	113
5.3	Formeln für Arbeit und Energie	115
Kapitel VI Nichteuklidische Liniengeometrie und die Grundbegriffe der nichteuklidischen Kinematik und Statik		117
1.	Zur Entwicklung und Verbreitung der nichteuklidischen Geometrie in Deutschland durch Felix Klein	117
1.1	Die Geburt der nichteuklidischen Geometrie	117
1.2	Die Cayley-Kleinsche Maßbestimmung	117
1.2.1	Cayleys projektive Maßbestimmung	117
1.2.2	Projektive Maßbestimmung und nichteuklidische Geometrie	119
2.	Das Erlanger Programm und das Aufkommen des modernen Mannigfaltigkeitsbegriffs	122
2.1	Das Erlanger Programm von Felix Klein	122
2.2	Nichteuklidische Geometrie, $n$ -dimensionale Geometrie und der Begriff der Mannigfaltigkeit	122
2.3	Bemerkungen zur Bewußtseinsgeschichte	123
3.	Geometrische Grundbegriffe der Mechanik des starren Körpers in Räumen mit projektiver Maßbestimmung: Ferdinand Lindemann	125
3.1	Zur Entstehung der Dissertation Lindemanns	125
3.2	Nichteuklidische Bewegungen	126
3.3	Unendlich kleine Bewegungen in ihrem Zusammenhang mit linearen Komplexen	129
3.3.1	Charakteristiken von Punkten und Geraden	129
3.3.2	Rotationskomplex und Translationskomplex	130
3.3.3	Der lineare Komplex in seiner Beziehung zur Fundamentalfläche der Maßbestimmung	138

3.3.3.1	Die Gleichung der Fundamentalfläche in Linienkoordinaten	138
3.3.3.2	Die nichteuklidischen Hauptachsen des linearen Komplexes	140
3.3.4	Die Zusammensetzung unendlich kleiner Bewegungen	142
3.3.5	Geometrische Beziehungen, die durch eine unendlich kleine Bewegung vermittelt werden	144
3.4	Metrische Beziehungen im Linien- und Komplexraum	146
3.4.1	Die Neigung zweier Geraden oder linearer Komplexe	146
3.4.2	Das gegenseitige Moment zweier Geraden oder linearer Komplexe	149
3.4.3	Die Intensität einer unendlich kleinen Bewegung	152
3.5	Über Begriff und Maß der Kraft	153
3.5.1	Grundsätzliches zum Begriff der Kraft	153
3.5.2	Rotationskräfte und Translationskräfte	154
3.5.3	Zusammensetzung von Kräften	155
3.5.4	Zusammensetzung von Kraftsystemen	155
3.5.5	Zusammenfassung: Tabelle der gegenseitigen Beziehungen von unendlich kleinen Bewegungen und Kräften	157
3.6	Theorie der Momente	157
3.6.1	Grundsätzliches zum Begriff des Momentes	157
3.6.2	Drehmomente und Verschiebungsmomente	159
3.6.3	Momente von Kraftsystemen	159
3.7	Der Begriff der Arbeit	161
3.7.1	Grundsätzliches zum Begriff der Arbeit	161
3.7.2	Die Analogie zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen als Polarität im Komplexraum	163
3.8	Zusammenfassende Würdigung Lindemanns	165
3.8.1	Über die Bedeutung der nichteuklidischen Fassung mechanischer Grundbegriffe	165
3.8.2	Lindemanns weiterer Werdegang	167
Kapitel VII Zur Wirkungsgeschichte der nichteuklidischen Geometrie und der geometrischen Mechanik		171
1.	Zur Rezeption der nichteuklidischen Geometrie in England	171
1.1	Zum Charakter der Mathematik in England um die Mitte des 19. Jh.	171
1.2	William Kingdon Clifford und die Verbreitung der nicht- euklidischen Geometrie in England	172
1.2.1	Clifford als Wegbereiter der nichteuklidischen Geometrie in England	172
1.2.2	Die Cliffordschen Schiebungen des elliptischen Raumes	176

1.2.3 Die Cliffordschen Biquaternionen	180
1.3 Dynamik des starren Körpers im elliptischen Raum:	
Robert Samuel Heath	183
1.3.1 Zur Entstehung und Vorgeschichte der Arbeit von Heath	183
1.3.2 Mechanik des starren Körpers im elliptischen Raum	185
1.3.2.1 Kinematik im elliptischen Raum	185
1.3.2.2 Dynamik im elliptischen Raum	188
1.3.3 Diskussion der Ergebnisse von Heath	191
2. Zur Rezeption der nichteuklidischen Geometrie in Italien	196
2.1 Verarbeitung und Verbreitung der nichteuklidischen Geometrie in Italien	196
2.1.1 Guiseppe Battaglini und Eugenio Beltrami	196
2.1.2 Nichteuklidische Liniengeometrie: Enrico d'Ovidio	197
2.2 Dynamik des starren Körpers in einem Raum konstanter Krümmung: Domenico de Francesco	198
2.2.1 Kinematik	198
2.2.2 Integration der Bewegungsgleichungen	198
3. Zur Weiterentwicklung der geometrischen Mechanik in Deutschland	200
3.1 Präzisierung der geometrischen Grundlagen und des algebraischen Apparates durch Eduard Study	200
3.2 Untersuchungen zur nichteuklidischen Mechanik des starren Körpers: Wilhelm Killing	203
Kapitel VIII Zusammenfassung und Ausblick	207
1 Zusammenfassung	207
2 Ursachen für den Rückgang der Beschäftigung mit der geometrischen Mechanik	209
3 Ausblick ins 20. Jahrhundert	213
3.1 Geometrische Mechanik im euklidischen Raum	213
3.2 Geometrische Mechanik im nichteuklidischen Raum	214
3.3 Axiomatik der Mechanik	215
3.4 Schraubenrechnung und die Theorie der Mechanismen	215
Anmerkungen	217
Bibliographie	229
1. Bibliographische Hilfsmittel	229
2. Abkürzungen	239
3. Primärliteratur (chronologisch)	231
4. Sekundärliteratur (alphabetisch)	244
Register	252