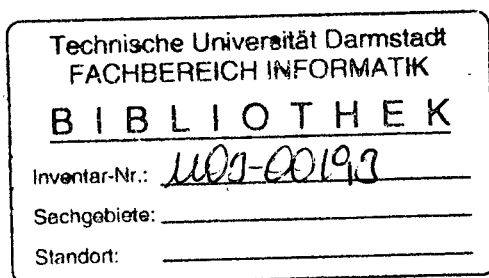


Gustav Feichtinger · Richard F. Hartl

# Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse

Anwendungen des Maximumprinzips  
in den Wirtschaftswissenschaften



Walter de Gruyter · Berlin · New York 1986

# Inhaltsverzeichnis

## Teil I. Das Maximumprinzip:

|                                                                                                        |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen</b> .....                                       | 1  |
| <b>Kapitel 1: Dynamische Entscheidungsprozesse</b> .....                                               | 3  |
| 1.1. Das Kontrollproblem .....                                                                         | 3  |
| 1.2. Motivierende Beispiele .....                                                                      | 5  |
| 1.3. Lösungskonzepte und historische Bemerkungen .....                                                 | 11 |
| Übungsbeispiele zu Kapitel 1 .....                                                                     | 12 |
| Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 1 .....                                            | 14 |
| <b>Kapitel 2: Heuristische Herleitung und ökonomische Interpretation des<br/>Maximumprinzips</b> ..... | 16 |
| 2.1. Notwendige Optimalitätsbedingungen für ein Standardmodell .....                                   | 16 |
| 2.2. Ein „Beweis“ über die dynamische Programmierung .....                                             | 24 |
| 2.3. Ökonomische Deutung des Maximumprinzips .....                                                     | 28 |
| 2.4. Zusammenhang mit der Variationsrechnung .....                                                     | 32 |
| 2.5. Hinreichende Bedingungen .....                                                                    | 34 |
| 2.6. Unendlicher Zeithorizont und Gleichgewichtslösung .....                                           | 39 |
| 2.7. Optimale Wahl des Endzeitpunktes .....                                                            | 44 |
| 2.8. Optimaler Endzeitpunkt bei Investitionsketten .....                                               | 47 |
| Übungsbeispiele zu Kapitel 2 .....                                                                     | 49 |
| Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 2 .....                                            | 50 |

## Teil II: Strukturanalyse von Kontrollmodellen .....

53

|                                                                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Kapitel 3: Lineare optimale Kontrollmodelle</b> .....                                                        | 55  |
| 3.1. Ein lineares Instandhaltungsmodell .....                                                                   | 56  |
| 3.2. Optimale Ausbildung im Lebenszyklus .....                                                                  | 59  |
| 3.3. Raschestmögliche Annäherung an eine singuläre Lösung:<br>Eine Anwendung des Integralsatzes von Green ..... | 66  |
| 3.4. Zeitoptimale Probleme .....                                                                                | 74  |
| 3.5. Modelle mit konvexer Hamiltonfunktion:<br>„chattering control“ .....                                       | 78  |
| Übungsbeispiele zu Kapitel 3 .....                                                                              | 81  |
| Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 3 .....                                                     | 83  |
| <b>Kapitel 4: Konkave Modelle mit einer Zustandsvariablen</b> .....                                             | 84  |
| 4.1. Ein quadratisches Instandhaltungsmodell .....                                                              | 85  |
| 4.2. Phasendiagrammanalyse bei einer Steuerung .....                                                            | 88  |
| 4.2.1. Zustands-Kozustands-Phasenporträt .....                                                                  | 90  |
| 4.2.2. Zustands-Kontroll-Phasenporträt .....                                                                    | 94  |
| 4.2.3. Existenz, Eindeutigkeit, Sensitivität und ökonomische Interpretation des<br>Gleichgewichtes .....        | 96  |
| 4.3. Phasendiagrammanalyse bei zwei gegenläufigen Steuerungen .....                                             | 100 |
| 4.3.1. Zustands-Kozustands-Phasenporträt .....                                                                  | 101 |

|                                                                                            |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.3.2. Zustands-Kontroll-Phasenporträts .....                                              | 105        |
| 4.3.3. Sensitivitätsanalyse des Gleichgewichtes .....                                      | 106        |
| 4.4. Mehrere Kontrollen und komparativ dynamische Analyse .....                            | 108        |
| 4.4.1. Dynamische Sensitivitätsanalyse bezüglich der Diskontrate .....                     | 110        |
| 4.4.2. Dynamische Sensitivitätsanalyse bezüglich des Planungshorizontes .....              | 112        |
| 4.5. Bestimmung der optimalen Lösung im Phasenporträt .....                                | 115        |
| 4.5.1. Globale Existenz des Sattelpunktpfades .....                                        | 115        |
| 4.5.2. Optimale Lösung bei Strudelpunkten .....                                            | 116        |
| 4.5.3. Monotonie des Zustandspfades in autonomen Steuerungsproblemen .....                 | 119        |
| Übungsbeispiele zu Kapitel 4 .....                                                         | 120        |
| Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 4 .....                                | 121        |
| <br><b>Kapitel 5: Nichtlineare Modelle mit mehr als einem Zustand .....</b>                | <b>122</b> |
| 5.1. Isoperimetrische Beschränkungen: Budgetmodelle .....                                  | 122        |
| 5.2. Zustandsseparable Modelle .....                                                       | 126        |
| 5.3. Linearisierung des kanonischen Differentialgleichungssystems .....                    | 133        |
| 5.3.1. Lokale Stabilitätsanalyse .....                                                     | 133        |
| 5.3.2. Analyse in der stabilen Mannigfaltigkeit .....                                      | 135        |
| 5.3.3. Beispiel: Optimale Inflation und Arbeitslosenrate .....                             | 136        |
| 5.4. Linear-quadratische Modelle .....                                                     | 140        |
| 5.5. Global asymptotische Stabilität und Ljapunov-Methode .....                            | 146        |
| 5.5.1. Der Ansatz über die Wertfunktion .....                                              | 148        |
| 5.5.2. Der Ansatz von Cass und Shell .....                                                 | 150        |
| 5.5.3. Der Ansatz von Brock und Scheinkman .....                                           | 152        |
| 5.5.4. Abschließende Bemerkungen zur asymptotischen Stabilität .....                       | 153        |
| Übungsbeispiele zu Kapitel 5 .....                                                         | 154        |
| Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 5 .....                                | 155        |
| <br><b>Teil III: Erweiterungen des Standardmodells .....</b>                               | <b>157</b> |
| <b>Kapitel 6: Dynamische Systeme mit Pfadrestriktionen und Endbedingungen</b> .....        | <b>159</b> |
| 6.1. Endbedingungen und zustandsabhängige Nebenbedingungen für die Kontrollvariablen ..... | 160        |
| 6.2. Reine Zustandsnebenbedingungen .....                                                  | 164        |
| 6.2.1. Direkte Methode .....                                                               | 165        |
| 6.2.2. Indirekte Methode .....                                                             | 169        |
| 6.2.3. Zusammenhang zwischen direkter und indirekter Methode .....                         | 171        |
| 6.2.4. Eine Variante des indirekten Ansatzes:<br>Die Methode von Hestenes und Russak ..... | 174        |
| 6.2.5. Ökonomische Interpretation und Beschränkungen höherer Ordnung .....                 | 175        |
| Übungsbeispiele zu Kapitel 6 .....                                                         | 177        |
| Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 6 .....                                | 178        |
| <br><b>Kapitel 7: Verschiedene Erweiterungen .....</b>                                     | <b>180</b> |
| 7.1. Erweiterung der hinreichenden Bedingungen .....                                       | 180        |
| 7.2. Unendlicher Zeithorizont .....                                                        | 186        |
| 7.3. Probleme mit freiem Endzeitpunkt .....                                                | 188        |
| 7.4. Freier Anfangszustand .....                                                           | 189        |
| 7.5. Existenz einer optimalen Lösung .....                                                 | 191        |
| Übungsbeispiele zu Kapitel 7 .....                                                         | 192        |
| Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 7 .....                                | 193        |

|                                                                                 |         |
|---------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <b>Kapitel 8: Beispiele</b>                                                     | 195     |
| 8.1. Anwendung der Kuhn-Tucker-Bedingungen                                      | 195     |
| 8.2. Endbedingungen                                                             | 197     |
| 8.3. Zustandsabhängige Pfadrestriktionen für die Steuerung                      | 201     |
| 8.4. Reine Zustandsnebenbedingungen                                             | 212     |
| 8.5. Freier Anfangszustand                                                      | 231     |
| Übungsbeispiele zu Kapitel 8                                                    | 234     |
| Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 8                           | 236     |
| <br><b>Teil IV: Fallstudien</b>                                                 | <br>237 |
| <b>Kapitel 9: Produktion und Lagerhaltung</b>                                   | 239     |
| 9.1. Minimierung von Produktions- und Lagerkosten bei gegebener Nachfrage       | 239     |
| 9.1.1. Das HMMS-Modell                                                          | 240     |
| 9.1.2. Lineare Produktions- und Lagerkosten                                     | 241     |
| 9.1.3. Lineare Lager- und konvexe Produktionskosten:<br>Das Arrow-Karlin-Modell | 242     |
| 9.1.4. Ein „Vorwärtsalgorithmus“ für das Arrow-Karlin-Modell                    | 247     |
| 9.1.5. Entscheidungs- und Prognosehorizont                                      | 253     |
| 9.1.6. Produktionsglättung bei Lagerobergrenze                                  | 255     |
| 9.1.7. Lineare Produktions- und konvexe Lager- bzw. Fehlmengenkosten            | 258     |
| 9.2. Simultane Preis- und Produktionsentscheidungen                             | 261     |
| 9.2.1. Das Modell von Pekelman                                                  | 261     |
| 9.2.2. Ein „Vorwärtsalgorithmus“ für das Pekelman-Modell                        | 266     |
| 9.2.3. Eine autonome Version mit konvexen Lager- und Produktionskosten          | 269     |
| 9.3. Weitere Ansätze                                                            | 274     |
| 9.3.1. Ein Spekulationsmodell: „Wheat Trading“                                  | 274     |
| 9.3.2. Produktionsglättung bei fluktuierendem Preis                             | 277     |
| Übungsbeispiele zu Kapitel 9                                                    | 279     |
| Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 9                           | 281     |
| <br><b>Kapitel 10: Instandhaltung und Ersatz</b>                                | <br>283 |
| 10.1. Das Modell von Kamien und Schwartz                                        | 287     |
| 10.2. Das Modell von Thompson                                                   | 291     |
| 10.2.1. Die lineare Version                                                     | 291     |
| 10.2.2. Eine nichtlineare Version                                               | 294     |
| 10.3. Optimale Instandhaltung und Inanspruchnahme einer Produktionsanlage       | 295     |
| 10.3.1. Das Modell von Hartl                                                    | 295     |
| 10.3.2. Eine linear-konkave Version                                             | 298     |
| 10.3.3. Eine nichtzustandsseparable Variante                                    | 306     |
| Übungsbeispiele zu Kapitel 10                                                   | 308     |
| Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 10                          | 310     |
| <br><b>Kapitel 11: Marketing Mix: Preis, Werbung und Produktqualität</b>        | <br>313 |
| 11.1. Optimale Werbestrategien                                                  | 313     |
| Das Dorfman-Steiner-Modell                                                      | 313     |
| 11.1.1. Werbekapitalmodelle                                                     | 314     |
| Das Nerlove-Arrow-Modell                                                        | 314     |
| Die Erweiterung von Gould                                                       | 318     |
| Das Modell von Jacquemin                                                        | 320     |
| Das Modell von Schmalensee                                                      | 321     |
| 11.1.2. Diffusionsmodelle                                                       | 322     |

|                                                                                                                     |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Das Vidale-Wolfe-Modell .....                                                                                       | 323        |
| Erstes Diffusionsmodell von Gould .....                                                                             | 324        |
| Zweites Diffusionsmodell von Gould .....                                                                            | 325        |
| Werbung für langlebige Gebrauchsgüter (Horsky und Simon) .....                                                      | 331        |
| 11.2. Strategisches Preismanagement .....                                                                           | 334        |
| 11.2.1. Optimale Preispolitik bei dynamischer Nachfrage und Kostenfunktion<br>(Kalish) .....                        | 335        |
| Separable Nachfrage .....                                                                                           | 339        |
| Preisabhängiges Marktpotential .....                                                                                | 341        |
| 11.2.2. Preispolitik bei drohendem Markteintritt von Konkurrenten (Gaskins) ..                                      | 342        |
| 11.3. Interaktion von Preis und Werbung .....                                                                       | 346        |
| 11.3.1. Optimales Marketing-Mix bei atomistischer Marktstruktur (Phelps und<br>Winter, Luptacik, Feichtinger) ..... | 346        |
| 11.3.2. Optimale Preis- und Werbestrategien für langlebige Konsumgüter .....                                        | 350        |
| 11.4. Produktqualität .....                                                                                         | 353        |
| Das Modell von Kotowitz und Mathewson .....                                                                         | 354        |
| Übungsbeispiele zu Kapitel 11 .....                                                                                 | 358        |
| Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 11 .....                                                        | 361        |
| <b>Kapitel 12: Unternehmenswachstum: Investition, Finanzierung und Beschäf-<br/>tigung .....</b>                    | <b>365</b> |
| 12.1. Das Modell von Jorgenson .....                                                                                | 365        |
| 12.2. Das Modell von Lesourne und Leban .....                                                                       | 368        |
| 12.2.1. Lösung mittels des Greenschen Theorems .....                                                                | 369        |
| Substitution zwischen Kapital und Arbeit im Laufe des Firmenwachstums                                               | 375        |
| 12.2.2. Lösung mittels Pfadverknüpfung .....                                                                        | 379        |
| Ermittlung der zulässigen Pfade .....                                                                               | 380        |
| Lösung des Syntheseproblems:<br>Verknüpfung der zulässigen Pfade zu optimalen Strategien .....                      | 386        |
| 12.2.3. Eine nichtlineare Version .....                                                                             | 393        |
| 12.3. Profitbeschränkung einer monopolistischen Firma: Der Averch-Johnson-Effekt.                                   | 394        |
| 12.3.1. Der statische AJ-Effekt .....                                                                               | 395        |
| 12.3.2. Ein dynamisches Modell bei Gewinnrestriktion .....                                                          | 397        |
| 12.3.3. Verschiedene Modellvarianten .....                                                                          | 402        |
| Lineare Investitionskosten .....                                                                                    | 402        |
| Der Fall nicht voll ausgenützter Produktionsfaktoren .....                                                          | 403        |
| Konvex-konkave Produktionsfunktion .....                                                                            | 404        |
| Übungsbeispiele zu Kapitel 12 .....                                                                                 | 404        |
| Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 12 .....                                                        | 407        |
| <b>Kapitel 13: Kapitalakkumulation .....</b>                                                                        | <b>409</b> |
| 13.1. Das Ramsey-Modell .....                                                                                       | 409        |
| 13.1.1. Das neoklassische Wachstumsmodell .....                                                                     | 409        |
| 13.1.2. Konkave Nutzen- und Produktionsfunktion .....                                                               | 411        |
| 13.1.3. Linearer Konsumnutzen .....                                                                                 | 413        |
| 13.1.4. Konvexe und konvex-konkave Nutzenfunktion .....                                                             | 414        |
| 13.1.5. Konvex-konkave Produktionsfunktion .....                                                                    | 418        |
| 13.2. Erweiterungen des Ramsey-Modells .....                                                                        | 420        |
| 13.2.1. Kapitalakkumulation und Umweltverschmutzung .....                                                           | 420        |
| 13.2.2. Kapitalakkumulation und Ressourcenabbau .....                                                               | 422        |
| 13.3. Humankapital .....                                                                                            | 425        |
| Übungsbeispiele zu Kapitel 13 .....                                                                                 | 427        |
| Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 13 .....                                                        | 429        |

|                                                                                                                                                                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Kapitel 14: Ressourcenmanagement</b> .....                                                                                                                                                                      | 431 |
| 14.1. Nicht erneuerbare Ressourcen.....                                                                                                                                                                            | 432 |
| 14.1.1. Verschiedene Marktformen bei vernachlässigbaren Extraktionskosten ...                                                                                                                                      | 432 |
| Gegebene Preistrajektorie .....                                                                                                                                                                                    | 432 |
| Vollständige Konkurrenz.....                                                                                                                                                                                       | 434 |
| Der Monopolfall.....                                                                                                                                                                                               | 435 |
| Soziales Optimum.....                                                                                                                                                                                              | 437 |
| 14.1.2. Monopolistische Ressourcenextraktion bei bestandsabhängigen Abbaukosten.....                                                                                                                               | 439 |
| 14.2. Erneuerbare Ressourcen .....                                                                                                                                                                                 | 441 |
| 14.2.1. Bioökonomische Grundbegriffe und das Gordon-Schaefer-Modell .....                                                                                                                                          | 442 |
| Der Fall freien Zuganges (open-access fishery).....                                                                                                                                                                | 444 |
| 14.2.2. Optimale Fangpolitiken bei verschiedenen Marktformen.....                                                                                                                                                  | 446 |
| Gegebene Preistrajektorie .....                                                                                                                                                                                    | 446 |
| Der Monopolfall.....                                                                                                                                                                                               | 449 |
| Soziales Optimum .....                                                                                                                                                                                             | 450 |
| 14.2.3. Das Beverton-Holt-Modell .....                                                                                                                                                                             | 452 |
| Übungsbeispiele zu Kapitel 14.....                                                                                                                                                                                 | 454 |
| Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 14 .....                                                                                                                                                       | 456 |
| <b>Kapitel 15: Umweltschutz</b> .....                                                                                                                                                                              | 459 |
| 15.1. Das Modell von Forster .....                                                                                                                                                                                 | 459 |
| 15.2. Das Modell von Luptacik und Schubert .....                                                                                                                                                                   | 462 |
| 15.3. Das Modell von Hartl und Luptacik .....                                                                                                                                                                      | 466 |
| 15.3.1. Statische Aktivitätsanalyse .....                                                                                                                                                                          | 468 |
| 15.3.2. Dynamische Aktivitätsanalyse .....                                                                                                                                                                         | 472 |
| 15.3.3. Modellvarianten .....                                                                                                                                                                                      | 474 |
| Übungsbeispiele zu Kapitel 15.....                                                                                                                                                                                 | 475 |
| Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 15 .....                                                                                                                                                       | 475 |
| <b>Kapitel 16: Sonstige Kontrollmodelle</b> .....                                                                                                                                                                  | 477 |
| 16.1. Forschung und Entwicklung .....                                                                                                                                                                              | 478 |
| 16.2. Bedienungstheorie.....                                                                                                                                                                                       | 478 |
| 16.3. Anwendungen in der Raumplanung .....                                                                                                                                                                         | 479 |
| 16.4. Biomedizinische Anwendungen.....                                                                                                                                                                             | 480 |
| 16.5. Militärische Anwendungen.....                                                                                                                                                                                | 481 |
| 16.6. Verschiedene weitere Anwendungen des Maximumprinzips .....                                                                                                                                                   | 482 |
| <br><b>Teil V: Anhänge</b>                                                                                                                                                                                         |     |
| A.1. Numerische Methoden.....                                                                                                                                                                                      | 487 |
| A.1.1. Nullstellenverfahren und statische Optimierung (Einfache Fixpunktiteration, Bisektion, Sekantenverfahren, Newtonverfahren, Gradientenverfahren, Methode der konjugierten Gradienten, Homotopieverfahren) .. | 487 |
| A.1.2. Dynamische Fixpunktiteration (Sukzessive Approximation).....                                                                                                                                                | 492 |
| A.1.3. Einfaches Schießverfahren .....                                                                                                                                                                             | 493 |
| A.1.4. Mehrzielmethode.....                                                                                                                                                                                        | 495 |
| A.1.5. Quasilinearisierung .....                                                                                                                                                                                   | 496 |
| A.1.6. Methode der konjugierten Gradienten .....                                                                                                                                                                   | 497 |
| A.1.7. Kollokationsverfahren .....                                                                                                                                                                                 | 499 |
| A.1.8. Variationen zweiter Ordnung.....                                                                                                                                                                            | 501 |
| A.1.9. Abschließende Bemerkungen zur Verwendung existierender Software ....                                                                                                                                        | 502 |

|                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------|-----|
| A.2. Das diskrete Maximumprinzip .....                           | 504 |
| A.3. Nichtdifferenzierbare Erweiterungen .....                   | 510 |
| A.4. Systeme mit Verzögerungen .....                             | 517 |
| A.5. Systeme mit verteilten Parametern .....                     | 522 |
| A.6. Impulskontrollen und Sprünge in den Zustandsvariablen ..... | 528 |
| A.7. Differentialspiele .....                                    | 533 |
| A.7.1. Nash-Gleichgewicht .....                                  | 535 |
| A.7.2. Stackelberg-Gleichgewicht .....                           | 537 |
| A.7.3. Nullsummenspiele .....                                    | 540 |
| A.7.4. Kooperative Lösungen .....                                | 541 |
| Pareto Gleichgewicht .....                                       | 541 |
| Drohstrategien .....                                             | 542 |
| A.7.5. Kapitalismusspiel .....                                   | 544 |
| A.7.6. Verhandlungsspiel .....                                   | 551 |
| A.7.7. Ergänzende Bemerkungen .....                              | 553 |
| A.8. Stochastische Kontrolltheorie .....                         | 555 |
| A.9. Dezentrale hierarchische Kontrolle .....                    | 561 |
| Interaktions-Schätzung .....                                     | 564 |
| Interaktions-Ausgleich .....                                     | 565 |
| Literatur .....                                                  | 573 |
| Personenverzeichnis .....                                        | 613 |
| Sachverzeichnis .....                                            | 619 |