Peter Deuflhard
Andreas Hohmann

Numerische Mathematik I

Eine algorithmisch orientierte Einführung

2., überarbeitete Auflage

Walter de Gruyter
Berlin · New York 1993

Inhalt

1 Lineare Gleichungssysteme 1
1.1 Auflösung gestaffelter Systeme 3
1.2 Gaußsche Eliminationsmethode 4
1.3 Pivot-Strategien und Nachiteration 8
1.4 Cholesky-Verfahren für symmetrische, positiv definite Matrizen 15
1.5 Übungen 18

2 Fehleranalyse 25
2.1 Fehlerquellen 26
2.2 Kondition eines Problems 28
2.2.1 Normweise Konditionsanalyse 30
2.2.2 Komponentenweise Konditionsanalyse 36
2.3 Stabilität eines Algorithmus 40
2.3.1 Stabilitätskonzepte 41
2.3.2 Vorwärtsanalyse 43
2.3.3 Rückwärtsanalyse 49
2.4 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme 51
2.4.1 Lösbarkeit unter der Lupe 51
2.4.2 Rückwärtsanalyse der Gauß-Elimination 53
2.4.3 Beurteilung von Näherungslösungen 57
2.5 Übungen 60

3 Lineare Ausgleichsprobleme 67
3.1 Gaußsche Methode der kleinsten Fehlerquadrate 67
3.1.1 Problemstellung 67
3.1.2 Normalgleichungen 70
3.1.3 Kondition 72
3.1.4 Lösung der Normalgleichungen 76
3.2 Orthogonalisierungsverfahren 77
3.2.1 Givens-Rotationen 79
3.2.2 Householder-Reflexionen 82
3.3 Verallgemeinerte Inverse 86
3.4 Übungen 91

4 Nichtlineare Gleichungssysteme und Ausgleichsprobleme . 95
4.1 Fixpunktiteration 95
4.2 Newton-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme 100
4.3 Gauß-Newton-Verfahren für nichtlineare Ausgleichsprobleme . 107
4.4 Parameterabhängige nichtlineare Gleichungssysteme 115
4.4.1 Lösungsstruktur 115
4.4.2 Fortsetzungsmethoden 117
4.5 Übungen 131

5 Symmetrische Eigenwertprobleme 137
5.1 Kondition des allgemeinen Eigenwertproblems 137
5.2 Vektoriteration 140
5.3 QR-Algorithmus für symmetrische Eigenwertprobleme 144
5.4 Singulärwertzerlegung 151
5.5 Übungen 157

6 Drei-Term-Rekursionen 159
6.1 Theoretische Grundlagen 161
6.1.1 Orthogonalität und Drei-Term-Rekursionen 161
6.1.2 Homogene und inhomogene Rekursionen 164
6.2 Numerische Aspekte 167
6.2.1 Kondition 169
6.2.2 Idee des Miller-Algorithmus 176
6.3 Adjungierte Summation 178
6.3.1 Summation von dominanten Lösungen 179
6.3.2 Summation von Minimallösungen 183
6.4 Übungen 187

7 Interpolation und Approximation 191
7.1 Klassische Polynom-Interpolation 192
7.1.1 Eindeutigkeit und Kondition 192
7.1.2 Hermite-Interpolation und dividierte Differenzen . . . 196
7.1.3 Approximationsfehler 205
7.1.4 Minimax-Eigenschaft der Tschebyscheff-Polynome . . 206
7.2 Trigonometrische Interpolation 210
7.3 Bézier-Technik 217
7.3.1 Bernstein-Polynome und Bézier-Darstellung 219
7.3.2 Algorithmus von de Casteljau 225
7.4 Splines 234
7.4.1 Splineräume und B-Splines 234
7.4.2 Splineinterpolation 243
7.4.3 Berechnung kubischer Splines 247

7.5 Übungen 251

8 Große symmetrische Gleichungssysteme und Eigenwertprobleme 255
8.1 Klassische Iterationsverfahren 257
8.2 Tschebyscheff-Beschleunigung 263
8.3 Verfahren der konjugierten Gradienten 269
8.4 Vorkonditionierung 277
8.5 Lanczos-Methoden 283
8.6 Übungen 288

9 Bestimmte Integrale 293
9.1 Quadraturformeln 294
9.2 Newton-Cotes-Formeln 298
9.3 Gauß-Christoffel-Quadratur 304
9.3.1 Konstruktion der Quadraturformeln 305
9.3.2 Berechnung der Knoten und Gewichte 310
9.4 Klassische Romberg-Quadratur 313
9.4.1 Asymptotische Entwicklung der Trapezsumme 313
9.4.2 Idee der Extrapolation 316
9.4.3 Details des Algorithmus 322
9.5 Adaptive Romberg-Quadratur 325
9.5.1 Adaptives Prinzip 327
9.5.2 Schätzung des Approximationsfehlers 329
9.5.3 Herleitung des Algorithmus 332
9.6 Schwierige Integranden 338
9.7 Adaptive Mehrgitter-Quadratur 342
9.7.1 Lokale Fehlerschätzung und Verfeinerungsregeln . . . 343
9.7.2 Globale Fehlerschätzung und Details des Algorithmus 347
9.8 Übungen 351

Literaturverzeichnis 355

Index 365