

Lothar Papula

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2

**Ein Lehr- und Arbeitsbuch
für das Grundstudium**

11., überarbeitete Auflage

Mit 377 Abbildungen, zahlreichen
Beispielen aus Naturwissenschaft und Technik
sowie 310 Übungsaufgaben mit ausführlichen
Lösungen

Viewegs Fachbücher der Technik



Inhaltsverzeichnis

I Lineare Algebra	1
1 Reelle Matrizen	1
1.1 Ein einführendes Beispiel	1
1.2 Definition einer reellen Matrix	2
1.3 Transponierte einer Matrix	6
1.4 Spezielle quadratische Matrizen	7
1.4.1 Diagonalmatrix	7
1.4.2 Einheitsmatrix	8
1.4.3 Dreiecksmatrix	8
1.4.4 Symmetrische Matrix	9
1.4.5 Schiefsymmetrische Matrix	10
1.5 Gleichheit von Matrizen	11
1.6 Rechenoperationen für Matrizen	11
1.6.1 Addition und Subtraktion von Matrizen	12
1.6.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	13
1.6.3 Multiplikation von Matrizen	14
2 Determinanten	19
2.1 Ein einführendes Beispiel	19
2.2 Zweireihige Determinanten	21
2.2.1 Definition einer zweireihigen Determinante	21
2.2.2 Eigenschaften zweireihiger Determinanten	22
2.3 Dreireihige Determinanten	30
2.3.1 Definition einer dreireihigen Determinante	30
2.3.2 Entwicklung einer dreireihigen Determinante nach Unterdeterminanten (Laplacescher Entwicklungssatz)	33
2.4 Determinanten höherer Ordnung	37
2.4.1 Definition einer n -reihigen Determinante	37
2.4.2 Laplacescher Entwicklungssatz	41
2.4.3 Rechenregeln für n -reihige Determinanten	43
2.4.4 Regeln zur praktischen Berechnung einer n -reihigen Determinante	46
3 Ergänzungen	50
3.1 Reguläre Matrix	50
3.2 Inverse Matrix	51
3.3 Orthogonale Matrix	54
3.4 Rang einer Matrix	59

4 Lineare Gleichungssysteme	65
4.1 Allgemeine Vorbetrachtungen	65
4.2 Gaußscher Algorithmus	68
4.3 Lösungsverhalten eines linearen (m,n) -Gleichungssystems	72
4.4 Lösungsverhalten eines quadratischen linearen Gleichungssystems	79
4.4.1 Inhomogenes lineares (n,n) -System	79
4.4.2 Homogenes lineares (n,n) -System	83
4.4.3 Cramersche Regel	86
4.5 Berechnung einer inversen Matrix nach dem Gaußschen Algorithmus (Gauß-Jordan-Verfahren)	89
4.6 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren	91
4.6.1 Ein einführendes Beispiel	91
4.6.2 Linear unabhängige bzw. abhängige Vektoren	93
4.6.3 Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren	95
4.7 Ein Anwendungsbeispiel: Berechnung eines elektrischen Netzwerkes	100
5 Komplexe Matrizen	101
5.1 Ein einführendes Beispiel	102
5.2 Definition einer komplexen Matrix	103
5.3 Rechenoperationen und Rechenregeln für komplexe Matrizen	104
5.4 Konjugiert komplexe Matrix, konjugiert transponierte Matrix	106
5.5 Spezielle komplexe Matrizen	109
5.5.1 Hermitesche Matrix	109
5.5.2 Schiefhermitesche Matrix	112
5.5.3 Unitäre Matrix	114
6 Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix	116
6.1 Ein einführendes Beispiel	116
6.2 Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix	121
6.3 Eigenwerte und Eigenvektoren einer n -reihigen Matrix	128
6.4 Eigenwerte und Eigenvektoren spezieller Matrizen	134
6.4.1 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Diagonal- bzw. Dreiecksmatrix	134
6.4.2 Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix	136
6.4.3 Eigenwerte und Eigenvektoren einer hermiteschen Matrix	138
6.5 Ein Anwendungsbeispiel: Normalschwingungen gekoppelter mechanischer Systeme	140
Übungsaufgaben	142
Zu Abschnitt 1	142
Zu Abschnitt 2	143
Zu Abschnitt 3	146
Zu Abschnitt 4	149
Zu Abschnitt 5	153
Zu Abschnitt 6	155

2.2	Potenzieren	216
2.3	Rädizieren (Wurzelziehen)	219
2.4	Natürlicher Logarithmus	225
3	Anwendungen der komplexen Rechnung	227
3.1	Symbolische Darstellung von Schwingungen im Zeigerdiagramm	227
3.1.1	Darstellung einer Schwingung durch einen rotierenden komplexen Zeiger	227
3.1.2	Ungestörte Überlagerung von Schwingungen gleicher Frequenz ...	231
3.1.3	Anwendungsbeispiele aus Mechanik und Elektrotechnik	234
3.1.3.1	Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen	234
3.1.3.2	Überlagerung gleichfrequenter Wechselspannungen	236
3.2	Symbolische Berechnung eines Wechselstromkreises	237
3.2.1	Das Ohmsche Gesetz der Wechselstromtechnik	237
3.2.2	Widerstands- und Leitwertoperatoren	239
3.2.3	Ein Anwendungsbeispiel: Der Wechselstromkreis in Reihen- schaltung	244
4	Ortskurven	248
4.1	Ein einführendes Beispiel	248
4.2	Ortskurven einer parameterabhängigen komplexen Größe (Zahl)	249
4.3	Anwendungsbeispiele: Einfache Netzwerkfunktionen	253
4.3.1	Reihenschaltung aus einem ohmschen Widerstand und einer Induktivität (Widerstandsortskurve)	253
4.3.2	Parallelschaltung aus einem ohmschen Widerstand und einer Kapazität (Leitwertortskurve)	254
4.4	Inversion einer Ortskurve	255
4.4.1	Inversion einer komplexen Größe (Zahl)	255
4.4.2	Inversionsregeln	257
4.4.3	Ein Anwendungsbeispiel: Inversion einer Widerstandsortskurve ...	259
Übungsaufgaben	262
	Zu Abschnitt 1	262
	Zu Abschnitt 2	263
	Zu Abschnitt 3	265
	Zu Abschnitt 4	267
IV	Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen	269
1	Funktionen von mehreren Variablen und ihre Darstellung	269
1.1	Definition einer Funktion von mehreren Variablen	269
1.2	Darstellungsformen einer Funktion	272

1.2.1 Analytische Darstellung	272
1.2.2 Darstellung durch eine Funktionstabelle (Funktionstafel)	273
1.2.3 Graphische Darstellung	275
1.2.3.1 Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum	275
1.2.3.2 Schnittkurvendiagramme	281
2 Partielle Differentiation	287
2.1 Partielle Ableitungen 1. Ordnung	287
2.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung	296
2.3 Das totale oder vollständige Differential einer Funktion	301
2.3.1 Geometrische Betrachtungen	301
2.3.2 Definition des totalen oder vollständigen Differentials	303
2.4 Differentiation nach einem Parameter (Kettenregel)	307
2.4.1 Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter	308
2.4.2 Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern	313
2.5 Anwendungen	318
2.5.1 Implizite Differentiation	318
2.5.2 Linearisierung einer Funktion	322
2.5.3 Relative oder lokale Extremwerte	326
2.5.4 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	333
2.5.5 Lineare Fehlerfortpflanzung	340
3 Mehrfachintegrale	348
3.1 Doppelintegrale	349
3.1.1 Definition und geometrische Deutung eines Doppelintegrals	349
3.1.2 Berechnung eines Doppelintegrals	352
3.1.2.1 Doppelintegral in kartesischen Koordinaten	352
3.1.2.2 Doppelintegral in Polarkoordinaten	360
3.1.3 Anwendungen	366
3.1.3.1 Flächeninhalt	366
3.1.3.2 Schwerpunkt einer Fläche	373
3.1.3.3 Flächenmomente (Flächenträgheitsmomente)	379
3.2 Dreifachintegrale	386
3.2.1 Definition eines Dreifachintegrals	386
3.2.2 Berechnung eines Dreifachintegrals	388
3.2.2.1 Dreifachintegral in kartesischen Koordinaten	388
3.2.2.2 Dreifachintegral in Zylinderkoordinaten	392
3.2.3 Anwendungen	397
3.2.3.1 Volumen und Masse eines Körpers	397
3.2.3.2 Schwerpunkt eines Körpers	405
3.2.3.3 Massenträgheitsmomente	411
Übungsaufgaben	418
Zu Abschnitt 1	418
Zu Abschnitt 2	419
Zu Abschnitt 3	426

V Gewöhnliche Differentialgleichungen	433
1 Grundbegriffe	433
1.1 Ein einführendes Beispiel	433
1.2 Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung	435
1.3 Lösungen einer Differentialgleichung	436
1.4 Anfangs- und Randwertprobleme	438
2 Differentialgleichungen 1. Ordnung	442
2.1 Geometrische Betrachtungen	443
2.2 Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen	447
2.3 Integration einer Differentialgleichung durch Substitution	450
2.4 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	453
2.4.1 Definition einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung	453
2.4.2 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	454
2.4.3 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	456
2.4.3.1 Variation der Konstanten	456
2.4.3.2 Aufsuchen einer partikulären Lösung	460
2.5 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	463
2.6 Anwendungsbeispiele	467
2.6.1 Radioaktiver Zerfall	467
2.6.2 Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes	468
2.6.3 Wechselstromkreis	471
3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	475
3.1 Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	475
3.2 Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung	477
3.3 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	483
3.4 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	490
4 Anwendungen in der Schwingungslehre	501
4.1 Mechanische Schwingungen	501
4.1.1 Allgemeine Schwingungsgleichung der Mechanik	501
4.1.2 Freie ungedämpfte Schwingung	503
4.1.3 Freie gedämpfte Schwingung	508
4.1.3.1 Schwache Dämpfung (Schwingungsfall)	508
4.1.3.2 Starke Dämpfung (aperiodische Schwingung, Kriechfall)	511
4.1.3.3 Aperiodischer Grenzfall	515
4.1.3.4 Zusammenfassung	519
4.1.4 Erzwungene Schwingung	520
4.2 Elektrische Schwingungen	530
4.2.1 Schwingungsgleichung eines elektrischen Reihenschwingkreises	530
4.2.2 Freie elektrische Schwingung	533
4.2.3 Erzwungene elektrische Schwingung	536

5 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . .	540
5.1 Definition einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	540
5.2 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	541
5.3 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	548
5.4 Ein Eigenwertproblem: Bestimmung der Eulerschen Knicklast	553
6 Numerische Integration einer Differentialgleichung	558
6.1 Numerische Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung	558
6.1.1 Streckenzugverfahren von Euler	558
6.1.2 Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung	563
6.2 Numerische Integration einer Differentialgleichung 2. Ordnung nach dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung	569
7 Systeme linearer Differentialgleichungen	573
7.1 Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	573
7.1.1 Ein einführendes Beispiel	573
7.1.2 Grundbegriffe	574
7.1.3 Integration des homogenen linearen Differentialgleichungssystems	577
7.1.4 Integration des inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems	582
7.1.4.1 Aufsuchen einer partikulären Lösung	582
7.1.4.2 Einsetzungs- oder Eliminationsverfahren	586
7.1.5 Ein Anwendungsbeispiel: Kettenleiter	594
7.2 Systeme linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	599
Übungsaufgaben	606
Zu Abschnitt 1	606
Zu Abschnitt 2	606
Zu Abschnitt 3	612
Zu Abschnitt 4	615
Zu Abschnitt 5	619
Zu Abschnitt 6	621
Zu Abschnitt 7	623
VI Laplace-Transformationen	626
1 Grundbegriffe	626
1.1 Ein einführendes Beispiel	626
1.2 Definition der Laplace-Transformierten einer Funktion	629
1.3 Inverse Laplace-Transformation	634

2	Eigenschaften der Laplace-Transformation (Transformationsätze)	635
2.1	Linearität (Satz über Linearkombinationen)	636
2.2	Ähnlichkeitssatz	637
2.3	Verschiebungssätze	638
2.3.1	Erster Verschiebungssatz	638
2.3.2	Zweiter Verschiebungssatz	641
2.4	Dämpfungssatz	643
2.5	Ableitungssätze	644
2.5.1	Ableitungssatz für die Originalfunktion	644
2.5.2	Ableitungssatz für die Bildfunktion	646
2.6	Integralsätze	648
2.6.1	Integralsatz für die Originalfunktion	648
2.6.2	Integralsatz für die Bildfunktion	650
2.7	Faltungssatz	651
2.8	Grenzwertsätze	654
2.9	Zusammenfassung der Rechenregeln (Transformationsätze)	658
3	Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion	659
4	Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Originalbereich	663
4.1	Allgemeine Hinweise zur Rücktransformation	663
4.2	Tabelle spezieller Laplace-Transformationen	666
5	Anwendungen der Laplace-Transformation	669
5.1	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	669
5.1.1	Allgemeines Lösungsverfahren mit Hilfe der Laplace-Transformation	669
5.1.2	Integration einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	670
5.1.3	Integration einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	672
5.2	Einfache Beispiele aus Physik und Technik	675
5.2.1	Entladung eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand	675
5.2.2	Zeitverhalten eines PT_1 -Regelkreisgliedes	677
5.2.3	Harmonische Schwingung einer Blattfeder in einem beschleunigten System	678
5.2.4	Elektrischer Reihenschwingkreis	680
5.2.5	Gekoppelte mechanische Schwingungen	683
	Übungsaufgaben	685
	Zu Abschnitt 1	685
	Zu Abschnitt 2	686
	Zu Abschnitt 3	689
	Zu Abschnitt 4	690
	Zu Abschnitt 5	691

Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben	694
I Lineare Algebra	694
Abschnitt 1	694
Abschnitt 2	695
Abschnitt 3	697
Abschnitt 4	701
Abschnitt 5	706
Abschnitt 6	708
II Fourier-Reihen	714
Abschnitt 1	714
Abschnitt 2	715
III Komplexe Zahlen und Funktionen	717
Abschnitt 1	717
Abschnitt 2	719
Abschnitt 3	723
Abschnitt 4	725
IV Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen	727
Abschnitt 1	727
Abschnitt 2	729
Abschnitt 3	736
V Gewöhnliche Differentialgleichungen	744
Abschnitt 1	744
Abschnitt 2	745
Abschnitt 3	752
Abschnitt 4	756
Abschnitt 5	761
Abschnitt 6	765
Abschnitt 7	766
VI Laplace-Transformationen	773
Abschnitt 1	773
Abschnitt 2	775
Abschnitt 3	780
Abschnitt 4	780
Abschnitt 5	781
Literaturhinweise	791
Sachwortverzeichnis	792