

Analyse chaotischer Systeme

von

Dr. Thorsten Buzug

Forschungsanstalt der Bundeswehr
für Wasserschall- und Geophysik, Kiel



Wissenschaftsverlag
Mannheim · Leipzig · Wien · Zürich

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
1.1. Einführung.....	5
1.2. Übersicht.....	7
2. Fluiddynamik	12
2.1. Die Taylor-Couette-Strömung.....	12
3. Nichtlineare dynamische Systeme	16
3.1. Der Zustandsraum eines dynamischen Systems.....	16
3.2. Der Fluß.....	16
3.3. Die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen.....	17
3.4. Das Vektorfeld.....	18
3.5. Die linearisierte Flußabbildung.....	18
3.6. Der Attraktor.....	18
3.7. Das invariante Wahrscheinlichkeitsmaß.....	20
4. Verzweigungstheorie	21
4.1. Stationäre Lösungen.....	21
4.1.1. Der eindimensionale Fall.....	21
4.1.1.1. Der Entwicklungsgrad $p=2$	23
4.1.1.2. Der Entwicklungsgrad $p=3$	24
4.1.2. Der zweidimensionale Fall.....	25
4.1.3. Die Codimension.....	28
4.2. Verzweigungen beim Taylor-Couette-System.....	29
5. Rekonstruktion des Zustandsraumes	30
5.1. Die Zeitserie.....	31
5.2. Zeitverzögerte Koordinaten.....	32
5.3. Sukzessive Ableitungen der Zeitserie.....	36
6. Quantitative Charakterisierung von Attraktoren	37
6.1. Lyapunov-Exponenten.....	37
6.1.1. Die Berechnung der Lyapunov-Exponenten.....	42
6.1.2. Die Berechnung der Exponenten aus experimentellen, skalaren Zeitserien.....	45
6.1.2.1. Ermittlung des größten Lyapunov-Exponenten.....	45

6.1.2.2. Approximation der linearisierten Flußabbildung.....	47
6.2. Fraktale Dimensionen	55
6.2.1. Die generalisierte Dimension.....	56
6.2.2. Die punktweise Dimension	59
6.2.3. Die Kaplan-Yorke-Dimension	61
6.2.4. Die topologische Dimension des Tangentialraumes	62
6.2.5. Die gemittelte lokale intrinsische Dimension (LID)	65
6.3. Die Entropien.....	67
6.3.1. Die metrische Entropie	67
6.3.2. Die generalisierte Entropie	67
7. Ermittlung optimaler Einbettungsparameter	70
7.1. Motivation	70
7.2. Die Wahl der Zeitverzögerung τ	72
7.2.1. Die Autokorrelationsfunktion	72
7.2.2. Die Transinformation	74
7.3. Die Wahl der Einbettungsdimension	75
7.3.1. Singulärwertzerlegung der globalen Trajektorienmatrix	75
7.3.1.1. Abschätzung der Einbettungsdimension	75
7.3.1.2. Eine neue orthogonale Basis	78
7.3.2. Lokale Verfahren zur Ermittlung von \dim_E	82
7.4. Simultane Wahl der Einbettungsparameter	83
7.4.1. Das Waberprodukt.....	83
7.4.2. Zählen der nächsten Nachbarn.....	85
7.4.3. Der Füll-Faktor.....	93
7.4.3.1. Test des Füll-Faktor-Algorithmus.....	96
7.4.3.2. Abschätzung der minimal notwendigen Einbettungsdimension und der Einfluß von Rauschen.....	100
7.4.3.3. Der Einfluß von N_{Dat} und N_{Ref} auf den Füll- Faktor	104
7.4.4. Die Integrale Lokale Deformation (ILD).....	106
7.4.4.1. Motivation	106
7.4.4.2. Berechnung der Integralen Lokalen Deformation	107
7.4.4.3. Test der ILD.....	112
7.4.4.4. Der Einfluß von N_{Dat} und N_{Ref} auf ILD.....	119
7.4.4.5. Der Einfluß der Auflösung des A/D-Wandlers auf die ILD	121
7.4.4.6. Gemittelte Lokale Deformation (LD)	122
7.4.5. Vergleich der Verfahren	123

8. Experimenteller Aufbau des Taylor-Couette-Systems	129
8.1. Der mechanische Aufbau des Experimentes	129
8.1.1. Der Taylor-Zylinder	129
8.1.2. Die Temperaturstabilisierung.....	131
8.1.3. Die Drehzahlstabilisierung.....	131
8.2. Die Meßmethode.....	132
8.2.1. Der optische Aufbau.....	132
8.2.1.1. Die Sendeeinheit	132
8.2.1.2. Die Empfangseinheit.....	133
8.2.1.3. Die Auswertelektronik.....	134
8.3. Die Kenndaten der Apparatur.....	135
9. Filterung von Zeitserien	136
9.1. Analoge Tiefpaßfilterung von Zeitserien	138
9.2. Rauschunterdrückung durch Singulärwertzerlegung	141
9.3. Rauschreduktion durch Approximation des lokalen Flusses	146
9.4. Vergleich der Verfahren für chaotische Dynamik.....	149
10. Transinformation räumlich getrennter Messungen	153
10.1. Die Messungen	155
10.2. Globale Attraktoren.....	156
10.3. Auswertung der Messungen	158
11. Szenarien des Taylor-Couette-Systems	161
11.1. Periodenverdopplung	162
11.1.1. Messung der Verzweigungsdiagramme	163
11.1.2. Quantitative Charakterisierung des Szenarios	171
11.2. Intermittenz in der Nähe eines homoklinen Orbits.....	189
11.2.1. Messung der Verzweigungsdiagramme	190
11.2.2. Homokline Orbits	191
11.2.3. Interpretation der Verzweigungen.....	193
11.2.4. Quantitative Charakterisierung des Szenarios	195
11.3. Das Ruelle-Takens-Newhouse-Szenario.....	199
11.3.1. Das Aufbrechen eines T^2 -Torus	199
11.3.2. Die Moden bei großen Zylinderhöhen	200
11.3.3. Quantitative Charakterisierung des Szenarios	202
11.4. Stabile T^3 -Tori.....	205
11.4.1. Die dominierenden Moden	206

11.4.2. Qualitative und quantitative Charakterisierung der Sequenz.....	207
11.4.3. Recurrence Plots.....	212
12. Zusammenfassung und Ausblick	215
A. Anhang.....	218
A.1. Die Testsysteme	218
A.1.1. Hénon-Attraktor.....	218
A.1.2. Lorenz-Attraktor	218
A.1.3. Rössler-Attraktor	219
A.1.4. Duffing-Attraktor.....	219
A.2. Das Wiener-Khintchine Theorem	220
Literatur.....	221
Liste häufig verwendeter Symbole und Abkürzungen	228
Index	231