

# Analyse chaotischer Systeme

von

Dr. Thorsten Buzug

Forschungsanstalt der Bundeswehr  
für Wasserschall- und Geophysik, Kiel



**Wissenschaftsverlag**  
Mannheim · Leipzig · Wien · Zürich

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b> .....	5
1.1. Einführung.....	5
1.2. Übersicht .....	7
<b>2. Fluiddynamik</b> .....	12
2.1. Die Taylor-Couette-Strömung .....	12
<b>3. Nichtlineare dynamische Systeme</b> .....	16
3.1. Der Zustandsraum eines dynamischen Systems.....	16
3.2. Der Fluß.....	16
3.3. Die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen .....	17
3.4. Das Vektorfeld.....	18
3.5. Die linearisierte Flußabbildung .....	18
3.6. Der Attraktor.....	18
3.7. Das invariante Wahrscheinlichkeitsmaß .....	20
<b>4. Verzweigungstheorie</b> .....	21
4.1. Stationäre Lösungen.....	21
4.1.1. Der eindimensionale Fall.....	21
4.1.1.1. Der Entwicklungsgrad $p=2$ .....	23
4.1.1.2. Der Entwicklungsgrad $p=3$ .....	24
4.1.2. Der zweidimensionale Fall .....	25
4.1.3. Die Codimension .....	28
4.2. Verzweigungen beim Taylor-Couette-System .....	29
<b>5. Rekonstruktion des Zustandsraumes</b> .....	30
5.1. Die Zeitserie .....	31
5.2. Zeitverzögerte Koordinaten.....	32
5.3. Sukzessive Ableitungen der Zeitserie .....	36
<b>6. Quantitative Charakterisierung von Attraktoren</b> .....	37
6.1. Lyapunov-Exponenten .....	37
6.1.1. Die Berechnung der Lyapunov-Exponenten.....	42
6.1.2. Die Berechnung der Exponenten aus experimentellen, skalaren Zeitserien.....	45
6.1.2.1. Ermittlung des größten Lyapunov-Exponenten.....	45

6.1.2.2. Approximation der linearisierten Flußabbildung.....	47
6.2. Fraktale Dimensionen .....	55
6.2.1. Die generalisierte Dimension.....	56
6.2.2. Die punktweise Dimension .....	59
6.2.3. Die Kaplan-Yorke-Dimension .....	61
6.2.4. Die topologische Dimension des Tangentialraumes .....	62
6.2.5. Die gemittelte lokale intrinsische Dimension (LID) .....	65
6.3. Die Entropien.....	67
6.3.1. Die metrische Entropie .....	67
6.3.2. Die generalisierte Entropie .....	67
<b>7. Ermittlung optimaler Einbettungsparameter .....</b>	<b>70</b>
7.1. Motivation .....	70
7.2. Die Wahl der Zeitverzögerung $\tau$ .....	72
7.2.1. Die Autokorrelationsfunktion .....	72
7.2.2. Die Transinformation .....	74
7.3. Die Wahl der Einbettungsdimension .....	75
7.3.1. Singulärwertzerlegung der globalen Trajektorienmatrix .....	75
7.3.1.1. Abschätzung der Einbettungsdimension .....	75
7.3.1.2. Eine neue orthogonale Basis .....	78
7.3.2. Lokale Verfahren zur Ermittlung von $\dim_E$ .....	82
7.4. Simultane Wahl der Einbettungsparameter .....	83
7.4.1. Das Waberprodukt.....	83
7.4.2. Zählen der nächsten Nachbarn.....	85
7.4.3. Der Füll-Faktor.....	93
7.4.3.1. Test des Füll-Faktor-Algorithmus.....	96
7.4.3.2. Abschätzung der minimal notwendigen Einbettungsdimension und der Einfluß von Rauschen.....	100
7.4.3.3. Der Einfluß von $N_{\text{Dat}}$ und $N_{\text{Ref}}$ auf den Füll- Faktor .....	104
7.4.4. Die Integrale Lokale Deformation (ILD).....	106
7.4.4.1. Motivation .....	106
7.4.4.2. Berechnung der Integralen Lokalen Deformation .....	107
7.4.4.3. Test der ILD.....	112
7.4.4.4. Der Einfluß von $N_{\text{Dat}}$ und $N_{\text{Ref}}$ auf ILD.....	119
7.4.4.5. Der Einfluß der Auflösung des A/D-Wandlers auf die ILD .....	121
7.4.4.6. Gemittelte Lokale Deformation (LD) .....	122
7.4.5. Vergleich der Verfahren .....	123

---

<b>8. Experimenteller Aufbau des Taylor-Couette-Systems</b> .....	129
8.1. Der mechanische Aufbau des Experimentes .....	129
8.1.1. Der Taylor-Zylinder .....	129
8.1.2. Die Temperaturstabilisierung.....	131
8.1.3. Die Drehzahlstabilisierung.....	131
8.2. Die Meßmethode.....	132
8.2.1. Der optische Aufbau.....	132
8.2.1.1. Die Sendeeinheit .....	132
8.2.1.2. Die Empfangseinheit.....	133
8.2.1.3. Die Auswerteelektronik.....	134
8.3. Die Kenndaten der Apparatur.....	135
<b>9. Filterung von Zeitserien</b> .....	136
9.1. Analoge Tiefpaßfilterung von Zeitserien .....	138
9.2. Rauschunterdrückung durch Singulärwertzerlegung .....	141
9.3. Rauschreduktion durch Approximation des lokalen Flusses .....	146
9.4. Vergleich der Verfahren für chaotische Dynamik.....	149
<b>10. Transinformation räumlich getrennter Messungen</b> .....	153
10.1. Die Messungen .....	155
10.2. Globale Attraktoren.....	156
10.3. Auswertung der Messungen .....	158
<b>11. Szenarien des Taylor-Couette-Systems</b> .....	161
11.1. Periodenverdopplung .....	162
11.1.1. Messung der Verzweigungsdiagramme .....	163
11.1.2. Quantitative Charakterisierung des Szenarios .....	171
11.2. Intermittenz in der Nähe eines homoklinen Orbits.....	189
11.2.1. Messung der Verzweigungsdiagramme .....	190
11.2.2. Homokline Orbits .....	191
11.2.3. Interpretation der Verzweigungen.....	193
11.2.4. Quantitative Charakterisierung des Szenarios .....	195
11.3. Das Ruelle-Takens-Newhouse-Szenario.....	199
11.3.1. Das Aufbrechen eines $T^2$ -Torus .....	199
11.3.2. Die Moden bei großen Zylinderhöhen .....	200
11.3.3. Quantitative Charakterisierung des Szenarios .....	202
11.4. Stabile $T^3$ -Tori.....	205
11.4.1. Die dominierenden Moden .....	206

---

11.4.2. Qualitative und quantitative Charakterisierung der Sequenz.....	207
11.4.3. Recurrence Plots.....	212
<b>12. Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>215</b>
<b>A. Anhang.....</b>	<b>218</b>
A.1. Die Testsysteme .....	218
A.1.1. Hénon-Attraktor.....	218
A.1.2. Lorenz-Attraktor .....	218
A.1.3. Rössler-Attraktor .....	219
A.1.4. Duffing-Attraktor.....	219
A.2. Das Wiener-Khintchine Theorem .....	220
<b>Literatur.....</b>	<b>221</b>
<b>Liste häufig verwendeter Symbole und Abkürzungen .....</b>	<b>228</b>
<b>Index .....</b>	<b>231</b>