

W. B. Krätzig, Y. Başar

# Tragwerke 3

Theorie und Anwendung der Methode  
der Finiten Elemente

Mit 168 Abbildungen



Springer

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung</b>	1
1.1 Strukturmechanische Modellbildungen	1
1.1.1 Prognosemodelle	1
1.1.2 Die klassischen Tragwerksmodelle der Festkörpermechanik	2
1.1.3 Diskretisierte Tragwerksmodelle	5
1.2 Konzepte für Festigkeitsanalysen	6
1.2.1 Überblick	6
1.2.2 Lineare Tragwerksanalysen nach Theorie 1. Ordnung	7
1.2.3 Geometrisch-nichtlineare Tragwerksanalysen, Theorie 2. Ordnung, Stabilität	8
1.2.4 Physikalisch-nichtlineare Tragwerksanalysen	12
1.3 Die Welt der finiten Elemente	13
1.3.1 Historische Aspekte	13
1.3.2 Eine Berechnungsmethode revolutioniert die Mechanik und die numerische Mathematik	15
<b>2 Strukturmodelle der Festkörpermechanik</b>	21
2.1 Zur formalen Struktur festkörpermechanischer Modelltheorien	21
2.2 Theorie ebener Stabtragwerke	25
2.2.1 Grundlagen	25
2.2.2 Gleichgewichtsbedingungen	26
2.2.3 Kinematische Beziehungen	27
2.2.4 Das Werkstoffgesetz	28
2.2.5 Theorie schubweicher Stäbe (TIMOSHENKO-Theorie)	29
2.2.6 Theorie schubsteifer Stäbe (BERNOULLI-NAVIER-Theorie)	30
2.2.7 Abschließende Betrachtungen	32
2.3 Theorie räumlicher Stabtragwerke	34
2.3.1 Grundlagen	34
2.3.2 Gleichgewichtsbedingungen	35
2.3.3 Kinematische Beziehungen	35
2.3.4 Das Werkstoffgesetz	36
2.3.5 Theorie schubweicher räumlich beanspruchter Stäbe	39
2.3.6 Theorie schubsteifer räumlich beanspruchter Stäbe	39

2.4	Theorie der Scheibentragwerke . . . . .	41
2.4.1	Grundlagen . . . . .	41
2.4.2	Gleichgewichtsbedingungen und Schnittgrößenfunktion . . . . .	43
2.4.3	Kinematische Beziehungen und Kompatibilitätsbedingungen . . . . .	45
2.4.4	Werkstoffgesetz . . . . .	47
2.4.5	Randvorgaben . . . . .	48
2.4.6	Strukturschema der Scheibentheorie . . . . .	51
2.4.7	Das klassische Lösungskonzept . . . . .	52
2.5	Theorie der Plattentragwerke . . . . .	52
2.5.1	Grundlagen . . . . .	52
2.5.2	Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	55
2.5.3	Kinematische Beziehungen . . . . .	57
2.5.4	Werkstoffgesetz . . . . .	60
2.5.5	Theorie schubweicher Platten (REISSNER-MINDLIN-Theorie) . . . . .	61
2.5.6	Theorie schubsteifer Platten (KIRCHHOFF-LOVE-Theorie) . . . . .	64
2.6	Theorie dreidimensionaler Kontinua . . . . .	69
2.6.1	Grundlagen . . . . .	69
2.6.2	Gleichgewichts- und Kräfte­randbedingungen . . . . .	70
2.6.3	Kinematische Beziehungen und Weggrößenrandbedingungen . . . . .	73
2.6.4	Werkstoffgesetz . . . . .	75
2.6.5	Strukturschema der Theorie dreidimensionaler Kontinua . . . . .	76
<b>3</b>	<b>Energieaussagen der Festkörpermechanik . . . . .</b>	<b>80</b>
3.1	Grundlagen . . . . .	80
3.1.1	Struktur der Funktionsräume festkörpermechanischer Modelle . . . . .	80
3.1.2	Der Energiesatz der Mechanik . . . . .	82
3.1.3	Adjungiertheit der Feldoperatoren . . . . .	85
3.2	Nähere Erläuterungen und Grundbegriffe . . . . .	87
3.2.1	Variablen und Operatoren . . . . .	87
3.2.2	Virtuelle Verformungen und virtuelle Kräfte . . . . .	91
3.2.3	Der Energiesatz als Wechselwirkungsfunktional . . . . .	93
3.3	Die klassischen Variationsprinzipie . . . . .	97
3.3.1	Das Prinzip der virtuellen Verformungen . . . . .	97
3.3.2	Das Prinzip der virtuellen Kräfte . . . . .	100
3.4	Die speziellen Prinzipie für elastisches Materialverhalten . . . . .	101
3.4.1	Das Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials . . . . .	102
3.4.2	Das Prinzip vom Minimum des konjugierten Gesamtpotential . . . . .	108
3.5	Die Sätze von CASTIGLIANO und BETTI . . . . .	112
3.5.1	Der erste Satz von CASTIGLIANO . . . . .	112
3.5.2	Der zweite Satz von CASTIGLIANO . . . . .	115
3.5.3	Der Satz von BETTI . . . . .	117

3.6	Die erweiterten Variationsprinzipie . . . . .	119
3.6.1	Erweiterte Funktionale auf der Basis $\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon})$ . . . . .	119
3.6.2	Erweiterte Funktionale auf der Basis $\hat{\Pi}(\boldsymbol{\sigma})$ . . . . .	123
3.7	Zusammenfassender Überblick . . . . .	128
<b>4</b>	<b>Diskrete Modelle zur Tragwerksanalyse</b> . . . . .	<b>135</b>
4.1	Grundlagen der Modellierung . . . . .	135
4.1.1	Tragwerksdefinition . . . . .	135
4.1.2	Äußere Zustandsvariablen . . . . .	135
4.1.3	Innere Zustandsvariablen . . . . .	137
4.1.4	Beispiel: Diskretes Fachwerkmodell . . . . .	138
4.2	Die Transformationen der Mechanik . . . . .	140
4.2.1	Gleichgewicht . . . . .	140
4.2.2	Kinematische Verträglichkeit . . . . .	144
4.2.3	Kontragredienzeigenschaften . . . . .	146
4.2.4	Werkstoffgesetz . . . . .	147
4.2.5	Vollständiges Transformationsschema . . . . .	151
4.3	Energieausagen . . . . .	154
4.3.1	Der Energiesatz der Mechanik . . . . .	154
4.3.2	Die Sätze von BETTI und CASTIGLIANO . . . . .	155
4.3.3	Die klassischen Variationsprinzipie . . . . .	156
4.3.4	Die Prinzipie für elastische Werkstoffe . . . . .	157
4.4	Verfahren zur Tragwerksanalyse . . . . .	160
4.4.1	Weggrößenverfahren und Minimum des Gesamtpotentials . . . . .	160
4.4.2	Kraftgrößenverfahren und Minimum des konjugierten Gesamtpotentials . . . . .	160
4.4.3	Gemischte Analyseverfahren . . . . .	163
<b>5</b>	<b>Einführung in finite Weggrößenelemente</b> . . . . .	<b>166</b>
5.1	Das Elementkonzept . . . . .	166
5.1.1	Allgemeine Grundlagen . . . . .	166
5.1.2	Diskretisierung und Herleitung der Elementmatrizen . . . . .	167
5.1.3	Konvergenzanforderungen . . . . .	173
5.2	Schubsteifes Balkenelement . . . . .	176
5.2.1	Diskretisierung und Verschiebungsansatz . . . . .	176
5.2.2	Element-Steifigkeitsbeziehung . . . . .	176
5.2.3	Eigenschaften von $\mathbf{k}^e$ . . . . .	181
5.3	Dreieckige Scheibenelemente . . . . .	182
5.3.1	Das CST-Element: Diskretisierung und Weggrößenapproximationen . . . . .	182
5.3.2	Element-Steifigkeitsmatrix und Schnittgrößenapproximation . . . . .	185
5.3.3	Alternative Formulierung . . . . .	187
5.3.4	Einführungsbeispiel . . . . .	190

5.3.5	Beispiel: Wandscheibe . . . . .	192
5.3.6	Dreieckelemente mit 6 Knoten . . . . .	192
5.4	Viereckige Scheibenelemente . . . . .	195
5.4.1	Zusammenbau aus Dreieckelementen . . . . .	195
5.4.2	Das parametrische Elementkonzept . . . . .	197
5.4.3	Schiefwinkliges isoparametrisches 4-Knoten-Viereckelement . . . . .	200
5.4.4	Transformation des Kinematikoperators . . . . .	203
5.4.5	Ermittlung der Elementmatrizen . . . . .	206
5.4.6	Der Sonderfall des 4-Knoten-Rechteckelementes . . . . .	207
5.4.7	Viereckelemente mit zusätzlichen Seitenknoten . . . . .	211
5.4.8	Beispiel: Balkenförmige Rechteckscheibe unter Gleichlast . . . . .	213
5.5	Dreidimensionale Kontinuums-elemente . . . . .	216
5.5.1	Elementvielfalt . . . . .	216
5.5.2	Lineares 4-Knoten-Tetraederelement . . . . .	219
5.5.3	Schiefwinkliges isoparametrisches 8-Knoten-Hexaederelement . . . . .	222
5.5.4	Orthogonales 8-Knoten-Hexaederelement: Die Steifigkeitsmatrix . . . . .	226
5.5.5	Orthogonales 8-Knoten-Hexaederelement: Die Volleinspannkraftgrößen . . . . .	228
5.6	Plattenelemente . . . . .	232
5.6.1	Elementüberblick . . . . .	232
5.6.2	Zur Modellierung von Dreieckelementen . . . . .	234
5.6.3	3-Knoten-Dreieckelement mit 9 Freiheitsgraden . . . . .	235
5.6.4	4-Knoten-Rechteckelement mit 12 Freiheitsgraden . . . . .	239
5.6.5	4-Knoten-Rechteckelement mit 16 Freiheitsgraden . . . . .	243
5.6.6	Rechteckplatte unter Gleichlast . . . . .	245
<b>6</b>	<b>Standardtechniken zur Tragwerksanalyse . . . . .</b>	<b>251</b>
6.1	Die direkte Steifigkeitsmethode . . . . .	251
6.1.1	Rückblick auf das allgemeine Weggrößenverfahren . . . . .	251
6.1.2	Gesamt-Steifigkeitsmatrix mittels Inzidenzen . . . . .	253
6.1.3	Globale Elementsteifigkeiten und Volleinspannkraftgrößen . . . . .	255
6.1.4	Auflagerfesselungen: Aktive und passive Knotenfreiheitsgrade . . . . .	260
6.1.5	Der Algorithmus der direkten Steifigkeitsmethode . . . . .	263
6.1.6	Beispiel: Ebenes Rahmentragwerk . . . . .	265
6.2	Programmsysteme zur Finiten-Element-Analyse . . . . .	269
6.2.1	Der Programmkern . . . . .	269
6.2.2	Maschinelle Assemblierung von $\tilde{\mathbf{K}}$ . . . . .	273
6.2.3	Überblick über ein Gesamtsystem . . . . .	275
6.2.4	Fehlerquellen und Kontrollmöglichkeiten . . . . .	277
6.2.5	Konditionierung von $\mathbf{K}$ und Stabilität der Gleichungsauflösung . . . . .	279

6.3	Allgemeine Ergänzungen . . . . .	282
6.3.1	Bandstruktur von $\tilde{\mathbf{K}}$ . . . . .	282
6.3.2	Bandbreitenminimierung . . . . .	285
6.3.3	Statische Kondensation . . . . .	290
6.3.4	Makroelemente . . . . .	292
6.3.5	Substrukturtechnik . . . . .	293
6.4	Diskretisierungsfehler, Vernetzungsstrategien und Konvergenz . . . . .	298
6.4.1	Problemstellung . . . . .	298
6.4.2	Der Patch-Test . . . . .	299
6.4.3	Locking-Effekte . . . . .	301
6.4.4	Diskretisierungsdichte und Netzspezifikation . . . . .	305
6.4.5	Diskretisierungsfehler und Fehlerindikatoren . . . . .	309
6.4.6	Automatische Netzadaptierung . . . . .	312
<b>Anhang 1: Interpolation und numerische Integration . . . . .</b>		<b>319</b>
A1.1	Interpolationstheorie für finite Elemente . . . . .	319
A1.2	LAGRANGESche Interpolationspolynome . . . . .	322
A1.3	HERMITESche Interpolationspolynome . . . . .	324
A1.4	Numerische Integration . . . . .	325
A1.5	Eindimensionale Integration . . . . .	327
A1.6	Zwei- und dreidimensionale Integration . . . . .	329
<b>Anhang 2: Natürliche Dreieckskoordinaten . . . . .</b>		<b>333</b>
A2.1	Definition, Eigenschaften und Transformation . . . . .	333
A2.2	Flächenberechnungen und Integrationen . . . . .	335
A2.3	JACOBI-Matrix . . . . .	335
A2.4	Formfunktionen in Dreieckskoordinaten . . . . .	337
<b>Anhang 3: Indexschreibweise in der Strukturmechanik . . . . .</b>		<b>339</b>
A3.1	Einführung in die Indexschreibweise . . . . .	339
A3.1.1	Darstellung der Variablen . . . . .	339
A3.1.2	EINSTEINSche Summationsregel . . . . .	341
A3.1.3	Koordinatensysteme und Ableitungen . . . . .	343
A3.2	Ergänzende Sätze . . . . .	344
A3.2.1	Partielle Integration . . . . .	344
A3.2.2	Der GAUSSSche Integralsatz . . . . .	345
A3.3	Theorie der Scheibentragwerke in Indexschreibweise . . . . .	346
A3.3.1	Bezeichnungen . . . . .	346
A3.3.2	Mechanische Variablen . . . . .	347
A3.3.3	Die Grundbeziehungen . . . . .	348
A3.4	Plattentheorie in Indexschreibweise . . . . .	352
A3.4.1	Mechanische Variablen . . . . .	352
A3.4.2	Grundgleichungen . . . . .	354

<b>Anhang 4: Einführung in die Variationsrechnung</b> . . . . .	357
A4.1 Theorie der Extremwerte von Funktionen . . . . .	357
A4.2 Grundbegriffe der Variationsrechnung . . . . .	359
A4.3 Das Variationssymbol $\delta$ und die erste Variation . . . . .	363
A4.4 Höhere Variationen . . . . .	368
A4.5 Extremalbedingungen eines Variationsproblems . . . . .	370
A4.6 Die äquivalenten Bedingungen eines Variationsproblems . . . . .	375
A4.7 Adjungiertheit der Operatoren in der Strukturmechanik . . . . .	386
A4.8 Variationsprobleme mit Nebenbedingungen . . . . .	387
A4.9 Isoparametrische Probleme . . . . .	392
 <b>Sachverzeichnis</b> . . . . .	 397