

Wahrscheinlichkeitsrechnung mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle

von Dr. rer. nat. Regina Storm

9. Auflage

Mit 72 Bildern, 24 Tafeln und zwei Beilagen



VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

Inhaltsverzeichnis

0.	<i>Einleitung</i>	13
Wahrscheinlichkeitsrechnung		
1.	<i>Einführung</i>	15
2.	<i>Ereignis, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit</i>	16
2.1.	Zufällige Erscheinungen und Ereignisse	16
2.2.	Relationen zwischen zufälligen Ereignissen	19
2.3.	Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	21
2.4.	Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit	24
2.5.	Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit	27
2.6.	Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten	28
3.	<i>Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit von Ereignissen</i>	31
3.1.	Die bedingte Wahrscheinlichkeit	31
3.2.	Unabhängigkeit von Ereignissen	32
3.3.	Satz über die totale Wahrscheinlichkeit	33
3.4.	Bayessche Formel	35
4.	<i>Zufallsgrößen und ihre Verteilungsfunktionen</i>	36
4.1.	Einführung der Zufallsgröße und ihrer Verteilungsfunktion	36
4.2.	Verteilungsfunktionen diskreter Zufallsgrößen	40
4.3.	Verteilungsfunktionen stetiger Zufallsgrößen	40
4.4.	Parameter von Zufallsgrößen	41
5.	<i>Spezielle Verteilungen</i>	43
5.1.	Diskrete Verteilungen	43
5.1.1.	Die diskrete gleichmäßige Verteilung	43
5.1.2.	Die Binomialverteilung	44
5.1.3.	Die hypergeometrische Verteilung	51
5.1.4.	Die <i>Poisson</i> -Verteilung	54
5.1.5.	Die geometrische Verteilung	56
5.2.	Stetige Verteilungen	58
5.2.1.	Die stetige gleichmäßige Verteilung	58
5.2.2.	Die Normalverteilung	58
5.2.3.	Die logarithmische Normalverteilung	65
5.2.4.	Die Exponentialverteilung	67
5.2.5.	Die <i>Weibull</i> -Verteilung	68

6.	<i>Zweidimensionale Zufallsgrößen und ihre Verteilungsfunktionen</i>	70
6.1.	Einführung der zweidimensionalen Zufallsgröße und ihrer Verteilungsfunktion	70
6.2.	Verteilungsfunktionen diskreter zweidimensionaler Zufallsgrößen	72
6.3.	Verteilungsfunktionen stetiger zweidimensionaler Zufallsgrößen	75
Mathematische Statistik		
7.	<i>Einführung</i>	78
8.	<i>Ein meßbares Merkmal und seine empirische Verteilung</i>	79
8.1.	Urliste, Häufigkeitstabelle, empirische Verteilung	79
8.2.	Graphische Darstellung von Häufigkeitsverteilungen	88
9.	<i>Statistische Maßzahlen eines meßbaren Merkmals</i>	92
9.1.	Mittelwerte	92
9.1.1.	Allgemeines	92
9.1.2.	Arithmetisches Mittel \bar{x}	92
9.1.3.	Empirischer Median \tilde{x}	95
9.1.4.	Empirischer Modalwert D	96
9.1.5.	Geometrisches Mittel \bar{x}_g	97
9.2.	Streuungsmaße	98
9.2.1.	Allgemeines	98
9.2.2.	Spannweite R	98
9.2.3.	Empirische Standardabweichung s , empirische Streuung s^2	99
9.2.4.	Empirischer Variationskoeffizient v	105
10.	<i>Zwei meßbare Merkmale und ihre empirische Verteilung</i>	106
10.1.	Urliste, Korrelationstabelle, empirische Verteilung	106
10.2.	Statistische Maßzahlen von zwei meßbaren Merkmalen	112
10.3.	Berechnung der empirischen Regressionsgeraden	118
11.	<i>Grundgesamtheit – Stichprobe, Stichprobenfunktion</i>	122
11.1.	Grundgesamtheit – Stichprobe	122
11.2.	Stichprobenfunktionen	125
11.3.	Einige wichtige Verteilungen von Stichprobenfunktion	127
12.	<i>Statistische Schätzmethoden</i>	130
12.1.	Allgemeine Aufgabenstellung	130
12.2.	Punktschätzungen	131
12.2.1.	Kriterien zur Auswahl einer Punktschätzung	132
12.2.2.	Beispiele für Punktschätzungen	133
12.2.2.1.	Punktschätzung für die Wahrscheinlichkeit p	133
12.2.2.2.	Punktschätzung für die Verteilungsfunktion $F(x)$	133
12.2.2.3.	Punktschätzungen für den Parameter μ der normalverteilten Grundgesamtheit	134
12.2.2.4.	Punktschätzungen für den Parameter σ der normalverteilten Grundgesamtheit	134
12.2.2.5.	Punktschätzungen für den Parameter λ der <i>Poisson</i> -verteilten Grundgesamtheit	135
12.2.3.	Maximum-Likelihood-Schätzmethode	136

12.2.4.	Methode der kleinsten Quadrate	139
12.3.	Konfidenzschätzungen	140
12.3.1.	Konfidenzintervalle	140
12.3.2.	Konfidenzintervalle für den Parameter μ der normalverteilten Grundgesamtheit bei bekanntem σ^2	141
12.3.3.	Konfidenzintervalle für den Parameter μ der normalverteilten Grundgesamtheit bei unbekanntem σ^2	145
12.3.4.	Konfidenzintervalle für den Parameter σ^2 der normalverteilten Grundgesamtheit	147
12.3.5.	Konfidenzintervalle für die Wahrscheinlichkeit p der alternativen Grundgesamtheit	150
12.4.	Toleranzschätzungen	151
12.4.1.	Statistische Toleranzgrenzen	151
12.4.2.	Statistische Toleranzgrenzen für normalverteilte Grundgesamtheit	152
12.4.3.	Verteilungsfreie statistische Toleranzgrenzen	153
13.	<i>Statistische Prüfverfahren</i>	154
13.1.	Allgemeine Aufgabenstellung	154
13.2.	Spezielle Prüfverfahren bei einem meßbaren Merkmal	155
13.2.1.	Prüfung des Mittelwerts μ der normalverteilten Grundgesamtheit bei bekannter Streuung σ^2	155
13.2.2.	Prüfung des Mittelwerts μ der normalverteilten Grundgesamtheit bei unbekannter Streuung σ^2	164
13.2.3.	Vergleich zweier Mittelwerte aus normalverteilten Grundgesamtheiten	166
13.2.3.1.	Die beiden Stichproben sind verbunden	166
13.2.3.2.	Die beiden Stichproben sind voneinander unabhängig	168
13.2.4.	Prüfung der Streuung σ^2 der normalverteilten Grundgesamtheit	171
13.2.5.	Vergleich zweier Streuungen aus normalverteilten Grundgesamtheiten	173
13.3.	Prüfung der Verteilung der Grundgesamtheit	176
13.3.1.	Einige Bemerkungen über die Voraussetzung der Normalverteilung	176
13.3.2.	Graphische Verfahren zur Prüfung der Verteilung	177
13.3.2.1.	Das Wahrscheinlichkeitspapier	177
13.3.2.2.	Das <i>Weibull</i> -Papier	182
13.3.3.	Prüfung der Verteilung mit dem χ^2 -Test	184
13.3.4.	Prüfung der Verteilung mit dem <i>Kolmogorov</i> -Test	189
13.4.	Spezielle Prüfverfahren bei einem qualitativen Merkmal	193
13.4.1.	Prüfung der Wahrscheinlichkeit p der alternativen Grundgesamtheit	193
13.4.2.	Vergleich zweier Wahrscheinlichkeiten aus alternativen Grundgesamtheiten	195
14.	<i>Varianzanalyse</i>	197
14.1.	Aufgabenstellung	197
14.2.	Einfache Klassifikation für Modell I	198
14.2.1.	Versuchsplan und mathematisches Modell	198
14.2.2.	Zerlegung der Summe der Abweichungsquadrate	200
14.2.3.	\mathcal{F} -Test zur Prüfung der Hypothese $H_0(H_A)$	201
14.2.4.	Tafel der Varianzanalyse	203
14.2.5.	<i>Bartlett</i> -Test	204
14.2.6.	<i>Duncan</i> -Test	206
14.3.	Zweifache Klassifikation für Modell I (einfache Besetzung)	209
14.3.1.	Versuchsplan und mathematisches Modell	209
14.3.2.	Zerlegung der Summe der Abweichungsquadrate	211
14.3.3.	\mathcal{F} -Test zur Prüfung der Hypothesen H_A und H_B	212

14.3.4.	Tafel der Varianzanalyse	213
14.4.	Zweifache Klassifikation für Modell I (mehrfache Besetzung)	215
14.4.1.	Versuchsplan und mathematisches Modell	215
14.4.2.	Zerlegung der Summe der Abweichungsquadrate	218
14.4.3.	\mathcal{F} -Test zur Prüfung der Hypothesen H_A , H_B und H_{AB}	218
14.4.4.	Tafel der Varianzanalyse	219
14.5.	Einfache Klassifikation für Modell II	220
14.5.1.	Versuchsplan und mathematisches Modell	220
14.5.2.	Punktschätzungen für σ_a^2 und σ_e^2	222
14.5.3.	\mathcal{F} -Test zur Prüfung der Hypothese H_a	223
14.5.4.	Konfidenzintervalle für σ_e^2 und $\frac{\sigma_a^2}{\sigma_e^2}$	223
15.	<i>Regressions- und Korrelationsanalyse</i>	225
15.1.	Aufgabenstellung	225
15.2.	Lineare Regression bei zwei meßbaren Merkmalen	226
15.2.1.	Das Modell der einfachen linearen Regression	226
15.2.2.	Prüfung des Regressionskoeffizienten der Regressionsgeraden	227
15.2.3.	Prüfung der Konstanten der Regressionsgeraden	229
15.2.4.	Konfidenzintervalle für die Regressionsgerade	229
15.2.5.	Vorhersageintervall für die Zielgröße	230
15.2.6.	Vergleich zweier Regressionsgeraden	231
15.3.	Mehrfache (multiple) lineare Regression	235
15.3.1.	Das Modell der mehrfachen linearen Regression	235
15.3.2.	Berechnung der empirischen Regressionsebene	235
15.3.3.	Prüfung der Regressionskoeffizienten	238
15.4.	Nichtlineare Regression	240
15.5.	Lineare Korrelation bei zwei meßbaren Merkmalen	241
15.5.1.	Voraussetzungen bei der linearen Korrelation	241
15.5.2.	Test auf Unabhängigkeit der Merkmale	241
15.5.3.	Prüfung des Grades des linearen Zusammenhangs zwischen zwei Merkmalen	243
15.5.4.	Vergleich zweier Korrelationskoeffizienten	245
15.6.	Partielle und mehrfache (multiple) lineare Korrelation	246
15.6.1.	Partielle lineare Korrelation	246
15.6.2.	Mehrfache (multiple) lineare Korrelation	250
16.	<i>Spezielle Prüfverfahren bei zwei qualitativen Merkmalen (Kontingenztafel)</i>	251
17.	<i>Einige nichtparametrische Prüfverfahren</i>	254
17.1.	Einführung	254
17.2.	Zeichentest	255
17.2.1.	Zeichentest zum Vergleich verbundener Stichproben	255
17.2.2.	Zeichentest zur Prüfung des Medians einer Verteilung	258
17.3.	<i>Wilcoxon-(Mann-Whitney-U)-Test</i>	259
17.4.	<i>X-Test von van der Waerden</i>	263
18.	<i>Das Ausreißerproblem</i>	266
18.1.	Ausreißertests	266
18.2.	Ausreißertest für normalverteilte Grundgesamtheit	268
18.3.	Ausreißertest nach <i>Dixon</i>	269

Statistische Qualitätskontrolle

19.	<i>Problemstellung</i>	270
20.	<i>Statistische Qualitätsregulierung (Kontrollkartentechnik)</i>	270
20.1.	Einführung	270
20.2.	Kontrollkarten für meßbare (quantitative) Qualitätsmerkmale	271
20.2.1.	Mittelwertkarte (\bar{x} -Karte)	271
20.2.1.1.	Aufbau der Mittelwertkarte	271
20.2.1.2.	Berechnung der Kontrollgrenzen für die Mittelwertkarte	274
20.2.1.2.1.	Wahl von α und n	274
20.2.1.2.2.	Sollwert a und Streuung σ^2 sind bekannt	275
20.2.1.2.3.	Schätzwerte für a und σ aus dem »Vorlauf«	276
20.2.1.3.	Führung der Kontrollkarte	283
20.2.2.	Einzelwertkarte	284
20.2.3.	Mediankarte (\tilde{x} -Karte)	286
20.2.4.	\bar{x}/s -Karte	288
20.2.5.	\bar{x}/R -Karte	290
20.2.6.	\tilde{x}/R -Karte	291
20.2.7.	Zusammenhang zwischen Kontroll- und Toleranzgrenzen	292
20.3.	Kontrollkarten für nicht meßbare (qualitative) Qualitätsmerkmale	294
20.3.1.	p -Karte	294
20.3.2.	c -Karte	299
20.3.3.	u -Karte	302
20.4.	Zusammenstellung der wichtigsten Kontrollkarten und ihrer Kontrollgrenzen	302
21.	<i>Mathematisch-statistische Stichprobenverfahren</i>	303
21.1.	Einführung	303
21.2.	Stichprobenverfahren für die Attributprüfung	305
21.2.1.	Einfache Stichprobenverfahren	305
21.2.1.1.	Aufbau eines einfachen Stichprobenplans	305
21.2.1.2.	Operationscharakteristik für einen einfachen Stichprobenplan	307
21.2.2.	Doppelte Stichprobenverfahren	312
21.2.3.	Mehrfache und Sequential-Stichprobenverfahren	314
21.2.4.	TGL 14450	315
21.3.	Stichprobenverfahren für die Variablenprüfung, TGL 14452	317
Anhang		
Tafel I:	Wahrscheinlichkeiten der <i>Poisson</i> -Verteilung	321
Tafel II:	Verteilungsdichte $\varphi(x)$ der standardisierten Normalverteilung	324
Tafel III:	Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der standardisierten Normalverteilung	326
Tafel IV:	Zweistellige Zufallszahlen	328
Tafel V:	Quantile $t_{m;q}$ der t -Verteilung	329
Tafel VI:	Quantile $\chi^2_{m;q}$ der χ^2 -Verteilung	330
Tafel VII:	Kritische Werte $\lambda_{n;1-\alpha}$ für den <i>Kolmogorov</i> -Test	331
Tafel VIII:	Quantile $F_{m_1,m_2;q}$ der \mathcal{F} -Verteilung für $q = 0,95$ und $q = 0,99$ (im Fettdruck)	332
Tafel IX:	Toleranzfaktoren $k_{n;\beta,\gamma}$ für normalverteilte Grundgesamtheit (μ und σ^2 unbekannt)	338
Tafel X:	Mindeststichprobenumfang n_0 für zweiseitiges verteilungsfreies Toleranzintervall	339

Tafel XI:	Mindeststichprobenumfang \hat{n}_0 für einseitiges verteilungsfreies Toleranzintervall	339
Tafel XII:	Kritische Werte $l_{n;1-\frac{\alpha}{2}}$ für den <i>Lord</i> -Test zur Prüfung von $H_0: \mu = \mu_0$	339
Tafel XIII:	Kritische Werte $l_{n_1, n_2; 1-\frac{\alpha}{2}}$ für den Spannweitentest nach <i>Lord</i> zur Prüfung von $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ($n_1 = n_2$)	339
Tafel XIV:	Kritische Werte $p_{n_1, n_2; 1-\alpha}$ für den Test nach <i>Pillai</i> und <i>Buenaventura</i> zur Prüfung von $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ für $\alpha = 0,05$ und $\alpha = 0,01$ (im Fettdruck)	340
Tafel XV:	Kritische Werte $q_\alpha(p; m)$ für den <i>Duncan</i> -Test ($\alpha = 0,01$ und $\alpha = 0,05$)	341
Tafel XVI:	Zufallshöchstwerte des Korrelationskoeffizienten	343
Tafel XVII:	Kritische Werte für den <i>X</i> -Test von <i>van der Waerden</i>	344
Tafel XVIII:	Kritische Werte $w_{n;\alpha}$ für den Ausreißertest bei normalverteilter Grundgesamtheit (μ und σ^2 unbekannt)	346
Tafel XIX:	Kritische Werte $\tau_{n;\alpha}$ für den Ausreißertest nach <i>Dixon</i>	346
Tafel XX:	Faktoren zur Berechnung der Kontrollgrenzen für die \bar{x} - und \bar{x} -Karte	347
Tafel XXI:	Faktoren zur Berechnung der Kontrollgrenzen für die <i>s</i> - und <i>R</i> -Karte	347
Tafel XXII:	Schlüsselbuchstaben nach TGL 14450	348
Tafel XXIII:	Einfachstichprobenpläne für Normalprüfung nach TGL 14450 (Auszug)	349
Tafel XXIV:	Stichprobenpläne für meßbare Qualitätsmerkmale nach TGL 14452	350
	Literatur- und Quellenverzeichnis	351
	Verzeichnis der wichtigsten Symbole und Formelzeichen	354
	Sachwortverzeichnis	357