

Walter Wunderlich, Gunter Kiener

Statik der Stabtragwerke



Teubner

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	1
1.1 Aufgaben der Statik	1
1.2 Zur Entwicklung der Rechenhilfsmittel und Verfahren der Statik ..	1
1.3 Rechenprogramme in Forschung, Praxis und Lehre	3
1.4 Folgerungen für die Lehre	4
1.5 Gegenstand und Ziel des vorliegenden Buches	4
1.6 Vorkenntnisse des Lesers	5
2 Grundzüge der Modellbildung für Stabtragwerke	7
2.1 Tragwerke und ihr Aufbau	7
2.2 Bauteile als Sonderformen dreidimensionaler Körper	7
2.3 Bauteilverbindungen	9
2.4 Koordinatensysteme	11
2.5 Lager und Stützungen	13
2.6 Einwirkungen	14
2.7 Struktur der Grundgleichungen der Statik	15
2.8 Stufen der Modellbildung in der Statik	16
2.9 Elementkonzept als Grundlage der Tragwerksanalyse	19
3 Vom Kontinuum zum Stab	25
3.1 Vorbemerkung	25
3.2 Grundgleichungen des linear elastischen Kontinuums	26
3.2.1 Annahmen	26

3.2.2 Kinematik	26
3.2.3 Stoffgesetz	29
3.2.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (Gleichgewicht)	30
3.2.5 Zusammenfassung der Grundgleichungen	36
3.3 Grundgleichungen der Biegung und Torsion des Stabes	40
3.3.1 Annahmen der Stabtheorie	40
3.3.2 Kinematik (Reduktion Kontinuum - Stabachse)	44
3.3.3 Stoffgesetz	46
3.3.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV)	47
3.3.4.1 Ausgangsformulierung	47
3.3.4.2 Virtuelle innere Arbeit im beliebigen Bezugssystem	47
3.3.4.3 Virtuelle innere Arbeit im Hauptachsensystem	52
3.3.4.4 Virtuelle äußere Arbeit im Hauptachsensystem	54
3.3.4.5 Resultierende Formulierung für den geraden Stab	57
4 Elementbeziehungen des eben beanspruchten Stabes	59
4.1 Vom Prinzip der virtuellen Verschiebungen zu den lokalen Grundgleichungen (Dgln.) und statischen Randbedingungen ...	60
4.1.1 Lokale Grundgleichungen (Differentialgleichungen)	62
4.1.2 Lösungen der Differentialgleichungen	63
4.2 Bezeichnungen und Definitionen	65
4.2.1 Zustandsgrößen und Vorzeichen-Konventionen	65
4.2.2 Definition von Elementmatrizen	67
4.3 Steifigkeitswerte von Stäben	70
4.3.1 PvV als Grundlage zur Ermittlung der Stabsteifigkeiten	70
4.3.2 Steifigkeitswerte und Lastanteile des Fachwerkstabes	71
4.3.3 Steifigkeitswerte und Lastanteile des Biegeträgers	74
4.3.4 Näherungsweise Ermittlung der Steifigkeiten	82
4.4 Übertragungsmatrix	88
4.4.1 Zustandsgrößen und Grundgleichungen	88
4.4.2 Übertragungsmatrix des Balkenelements	91
4.4.3 Lastspalten	92
4.4.4 Ermittlung von \mathbf{k} und \mathbf{U} mittels direkter Reihenintegration	94
4.5 Nachgiebigkeitsmatrix	95
4.6 Ermittlung von \mathbf{k} und \mathbf{U} mit Hilfe analytischer Lösungen	96
4.7 Übersicht: Wege zur Ermittlung von Element-Eigenschaften (Steifigkeits- und Übertragungsmatrizen)	98

5 Kraftgrößen statisch bestimmter ebener Tragwerke	99
5.1 Übersicht	99
5.2 Transformationsbeziehungen in der Ebene	103
5.2.1 Zustandsgrößen	103
5.2.2 Einwirkungen	104
5.3 Stäbe und Stabzüge	106
5.3.1 Fachwerkstäbe	106
5.3.2 Biegestäbe	107
5.3.3 Rahmenstäbe	114
5.3.4 Geknickte Rahmenstäbe	115
5.3.5 Verzweigte Rahmenstäbe	118
5.4 Zusammengesetzte Systeme	123
5.4.1 Übersicht	123
5.4.2 Fachwerke	123
5.4.3 Rahmen	126
5.4.4 Zur statischen Bestimmtheit ebener Fachwerke und Rahmen	130
5.5 Zur Berechnung von Weggrößen (Hinweise)	132
6 Drehwinkelverfahren als Sonderfall des Weggrößenverfahrens	133
6.1 Einführung, geometrische Unbestimmtheit	133
6.2 Lösungsweg des Drehwinkel-Verfahrens	135
6.2.1 Aufbau in Schritten	135
6.2.2 Einseitig eingespannter Träger als modifiziertes Grundelement	141
6.2.3 Übersicht: Vorgehensweise beim Drehwinkelverfahren	142
6.3 Zahlenbeispiel: Berechnung eines Durchlaufträgers	143
7 Weggrößenverfahren	147
7.1 Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen als Grundlage des Weggrößenverfahrens	147
7.2 Transformation von Zustandsgrößen	148
7.3 Systemberechnung durch Bilden von Knotengleichgewicht	151
7.3.1 Einführung	151

7.3.2 Systemberechnung eines ebenen Rahmens	152
7.3.3 Übersicht: Vorgehensweise beim Weggrößenverfahren	157
7.4 Beispiel der Berechnung eines ebenen Rahmens	158
7.5 Systemberechnung mit Hilfe von Inzidenztafeln	166
7.5.1 Einführung der Inzidenzmatrix	166
7.5.2 Inzidenztafel mit Beispielen und programmtechnische Realisierung	168
7.5.3 Eigenschaften der Gesamtsteifigkeitsmatrix	171
7.6 Kopplung von Freiheitsgraden (Teilelimination)	174
7.6.1 Einführung	174
7.6.2 Kopplung auf Elementebene	174
7.6.3 Kopplung auf Systemebene	177
7.6.4 Einführung von Koppel-Matrizen	177
7.6.5 Darstellung am Beispiel eines Hallenrahmens	178
7.6.6 Beispiel: Einbau von kinematischen Abhängigkeiten	181
7.7 Substrukturtechnik	186
8 Tragverhalten spezieller Stabtragwerke	189
8.1 Genäherte Berechnung elastisch gebetteter Balken	189
8.1.1 Numerisches Lösungsverhalten am Beispiel eines Fundamentbalkens	189
8.1.2 Biegemomente des elastisch gebetteten Balkens unter Einzellasten	192
8.1.3 Querkräfte des elastisch gebetteten Balkens unter Einzellasten ...	194
8.2 Analytische Berechnung elastisch gebetteter Balken	195
8.2.1 Grundlegende Beziehungen und Lösungen	196
8.2.2 Beispiel zum Tragverhalten: Kanalquerschnitt	199
8.3 Ebene Fachwerke	201
8.3.1 Grundgleichungen und Lösungen	201
8.3.2 Besonderheiten bei der Modellbildung von Fachwerksystemen	202
8.3.3 Beispiel zum Tragverhalten: Nagelbinder aus Holz	203
8.4 Ebene Rahmen	205
8.4.1 Grundgleichungen und Lösungen	205
8.4.2 Beispiele zum Tragverhalten einfeldriger Rahmen	206
8.4.2.1 Auswirkungen verschiedener statischer Systeme	206
8.4.2.2 Auswirkungen verschiedener Steifigkeitsverhältnisse	210
8.4.2.3 Beispiel einfeldriger Rahmen: Untersuchung von Rahmenecken	212

9 St. Venant'sche Torsion von Stäben	213
9.1 Vorbemerkung	213
9.2 Annahmen	214
9.3 Grundgleichungen	215
9.3.1 Herleitung über eine Verwölbungsfunktion	215
9.3.1.1 Kinematik der Verschiebungen; Spannungen	215
9.3.1.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (Gleichgewicht)	217
9.3.2 Herleitung über eine Spannungsfunktion	223
9.3.2.1 Differentialgleichung; Randbedingungen	224
9.3.2.2 Integrale Formulierung	225
9.3.3 Einfluss der Drehachse auf die Verwölbung	229
9.3.4 Zusammenstellung maßgebender Beziehungen	231
9.4 Membrananalogie	233
9.5 Stab mit Rechteckquerschnitt	234
9.6 Stäbe mit dünnwandigem offenen Querschnitt	240
9.6.1 Torsionsträgheitsmoment	240
9.6.2 Verwölbung	241
9.6.3 Abschnittsweise gekrümmte Wandabschnitte (Hinweise)	246
9.7 Zum Tragverhalten tordierter Stäbe mit beliebigem Querschnitt ..	247
9.7.1 Schubspannungslinien	247
9.7.2 Einzellige dünnwandige Querschnitte (Bredt'sche Torsion)	249
9.7.3 Mehrzellige dünnwandige Querschnitte (Hinweise)	253
9.7.4 Dünnwandige offene Querschnitte	254
9.8 Zusammenstellung maßgebender Beziehungen	255
10 Räumlich beanspruchte Stäbe	257
10.1 Annahmen und Berechnungsmodelle	257
10.2 Kinematik	260
10.3 Stoffgesetze	264
10.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen für den Stab	265
10.4.1 Formulierung für ein beliebiges Bezugssystem	265
10.4.2 Virtuelle innere Arbeit im beliebigen Bezugssystem	268
10.4.3 Virtuelle innere Arbeit im Hauptachsensystem	273
10.4.4 Virtuelle äußere Arbeit im Hauptachsensystem	275

10.4.5 Resultierende Formulierung	276
10.5 Differentialgleichungen, Kräfte- und Randbedingungen, Schnittgrößen	276
10.5.1 Stäbe mit dünnwandigem offenen Querschnitt unter Wölbkrafttorsion	276
10.5.2 Stäbe mit gedrunenem Querschnitt unter St. Venant'scher Torsion	282
10.6 Berechnung von Spannungsergebnissen und Spannungen	285
10.6.1 Mechanische Erörterung von Bimoment und Linienbimoment	285
10.6.2 Spannungsergebnisse und Verzerrungen der Stabachse	290
10.6.3 Normalspannungen	291
10.6.4 Schubspannungen	292
10.7 Ergänzende und weiterführende Hinweise	295
11 Elementbeziehungen des räumlich beanspruchten Stabes	299
11.1 Vorbemerkung	299
11.2 Torsionsträgheitsmoment der St. Venant'schen Torsion	299
11.3 Stäbe ohne Behinderung der Verwölbung aus Torsion	305
11.3.1 Positive Wirkungsrichtung von Zustandsgrößen und Einwirkungen	305
11.3.2 Übertragungsmatrix und Lastvektoren	308
11.3.3 Steifigkeitsmatrix und Volleinspann-Schnittgrößen	310
11.4 Stäbe mit Behinderung der Verwölbung aus Torsion	312
11.4.1 Positive Wirkungsrichtung von Zustandsgrößen und Einwirkungen	312
11.4.2 Übertragungsmatrix und Lastvektoren	315
11.4.2.1 Entwicklung aus dem Fundamentalsystem der Dgl. (Torsion)	315
11.4.2.2 Lösung mit Matrizenreihen (Torsion)	318
11.4.2.3 Resultierende Elementmatrizen	319
11.4.3 Steifigkeitsmatrix und Volleinspann-Schnittgrößen	319
11.4.3.1 Ermittlung aus Übertragungsmatrix und Lastvektoren (Torsion)	320
11.4.3.2 Genäherte Steifigkeitsmatrix und Lastvektoren (Torsion)	321
11.4.3.3 Resultierende Elementmatrizen	326
12 Kraftgrößen statisch bestimmter räumlicher Tragwerke	329
12.1 Übersicht	329
12.2 Transformationsbeziehungen im Raum	331
12.2.1 Systematik	331
12.2.2 Transformation	333
12.3 Stäbe und Stabzüge	334

12.3.1 Zur Berechnung von Lager- und Verbindungsreaktionen	334
12.3.2 Torsionsstäbe	336
12.3.3 Trägerroststäbe	339
12.3.4 Verzweigte Trägerroststäbe	340
12.3.5 Räumlich geknickte Stabzüge	342
12.4 Zusammengesetzte Systeme	347
12.4.1 Ebene, räumlich beanspruchte Rahmen und Trägerroste	347
12.4.2 Räumliche Rahmen	349
12.4.3 Zur statischen Bestimmtheit räumlicher Rahmen	350
13 Räumliche Stabtragwerke (Weggrößenverfahren)	353
13.1 Vorbemerkung	353
13.2 Transformationsbeziehungen	353
13.3 Systeme mit St. Venant'scher Torsion	357
13.3.1 Räumliche Rahmen	357
13.3.2 Räumlich beanspruchte ebene Tragwerke	361
13.3.3 Trägerroste	364
13.3.4 Durchlaufträger	368
13.4 Systeme mit Wölbkrafttorsion	373
13.4.1 Vorbemerkung	373
13.4.2 Torsionsträger mit Kragarm	373
13.4.3 Stütze unter exzentrischer Einzellast	377
13.4.4 Trägerroste	383
14 Einflusslinien	389
14.1 Vorbemerkung	389
14.2 Ermittlung von Einflusslinien	391
14.2.1 Die Sätze von Betti und Maxwell-Mohr	391
14.2.2 Einflusslinien für Weggrößen	393
14.2.3 Einflusslinien für Schnittgrößen	394
14.2.4 Einflusslinien für Auflagerkräfte	396
14.3 Beispiel	397

15 Strukturberechnung mit dem Kraftgrößenverfahren	401
15.1 Allgemeines	401
15.1.1 Zur Methode	401
15.1.2 Einführungsbeispiel	402
15.1.3 Ergänzungsarbeit (konjugierte Formänderungsarbeit)	403
15.1.4 Prinzip der virtuellen Kräfte	404
15.2 Das Prinzip der virtuellen Kräfte für Stabtragwerke	405
15.2.1 Innere virtuelle Ergänzungsarbeit	405
15.2.2 Äußere virtuelle Ergänzungsarbeit	406
15.2.3 Zusammenfassung zum Prinzip der virtuellen Kräfte	407
15.2.4 Eben beanspruchte Stabtragwerke	408
15.3 Vom Prinzip der virtuellen Kräfte zu den lokalen Grundgleichungen (Dgln.) und kinematischen Randbedingungen	408
15.4 Ermittlung diskreter Weggrößen: Arbeitssatz und Reduktionssatz	412
15.4.1 Arbeitssatz	412
15.4.2 Beispiel: Statisch bestimmter Zweifeldträger mit Gelenk	412
15.4.3 Beispiel: Statisch bestimmter federnd gelagerter Träger mit Gelenk	414
15.4.4 Reduktionssatz	415
15.4.5 Beispiel: Statisch unbestimmter Zweifeldträger	416
15.5 Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke	418
15.5.1 Herleitung der Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten	418
15.5.2 Übersicht: Vorgehensweise beim Kraftgrößenverfahren	421
15.5.3 Beispiel: Rahmen	422
15.5.4 Wechselnde statisch bestimmte Hauptsysteme	426
15.5.5 Statisch unbestimmte Hauptsysteme	428

Inhaltsverzeichnis	XV
Anhang A1: Integralsätze	431
A1-1 Partielle Integration (Teilintegration)	431
A1-2 Flächenintegral - Linienintegral	431
A1-3 Gauß'scher Integralsatz (Divergenz-Theorem): Volumenintegral - Flächenintegral	434
Anhang A2: Matrizenreihen und Systeme von Dgln. 1. Ordnung	437
A2-1 Vorbemerkung	437
A2-2 Gewöhnliche Dgln. als Systeme von Dgln. 1. Ordnung	437
A2-3 Matrizenreihen	438
A2-4 Lösung von Systemen von Dgln. 1. O. mittels Matrizenreihen .	441
Anhang A3: Hauptachsentransformation	443
A3-1 Dünnwandige offene Querschnitte	443
A3-1.1 Ausgangszustand: beliebiges Bezugssystem	443
A3-1.2 Übergang zum allgemeinen Schwerachsensystem	446
A3-1.3 Schubmittelpunkt im allgemeinen Schwerachsensystem	447
A3-1.4 Übergang zum Hauptachsensystem	450
A3-1.5 Zahlenbeispiel: Dünnwandiger offener Querschnitt	453
A3-2 Vollquerschnitte	457
A3-2.1 Ausgangszustand: beliebiges Bezugssystem	457
A3-2.2 Übergang zum allgemeinen Schwerachsensystem	460
A3-2.3 Übergang zum Hauptachsensystem	461
A3-2.4 Zahlenbeispiel: Gedrungener Querschnitt	462
A3-2.5 Schubmittelpunkt im Hauptachsensystem (Hinweise)	463
A3-3 Berücksichtigung von Symmetrieeigenschaften	464
Literatur	467
Sachverzeichnis	471